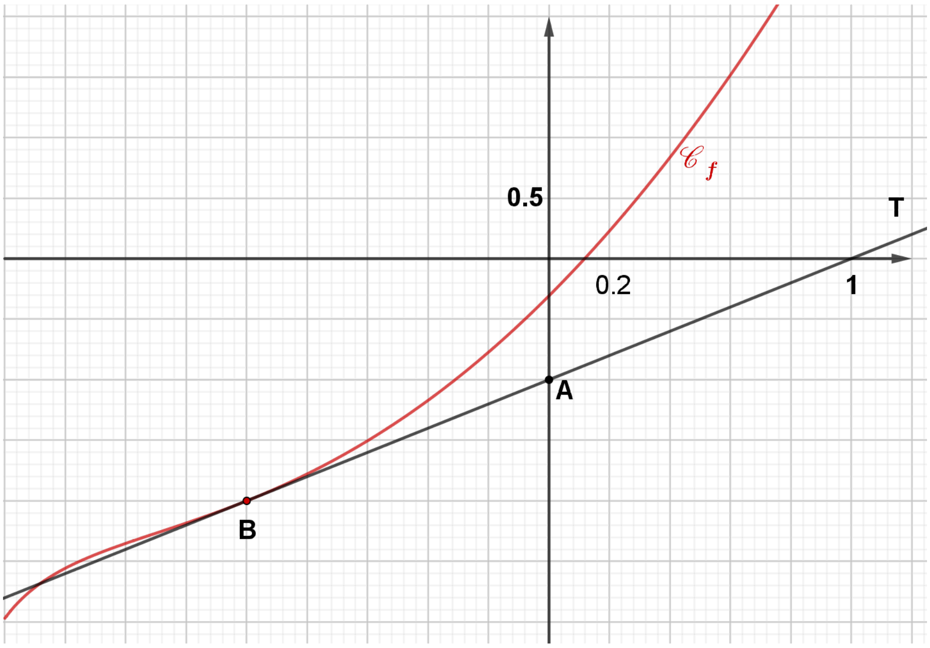
Exercice 3 6 points

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2;+\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse : 1, on précise que la droite T passe par le point A(0 ;1).



Partie A : exploitation graphique
À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.

3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f
On considère que la fonction f est définie sur $]-2;+\infty[$ par : $f(x)=x^2+2x-1+\ln(x+2)$
où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en : -2. Interprétergraphiquement ce résultat.
   On admet que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. Montrer que pour tout x>-2 : $f'(x)=\dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations complet.

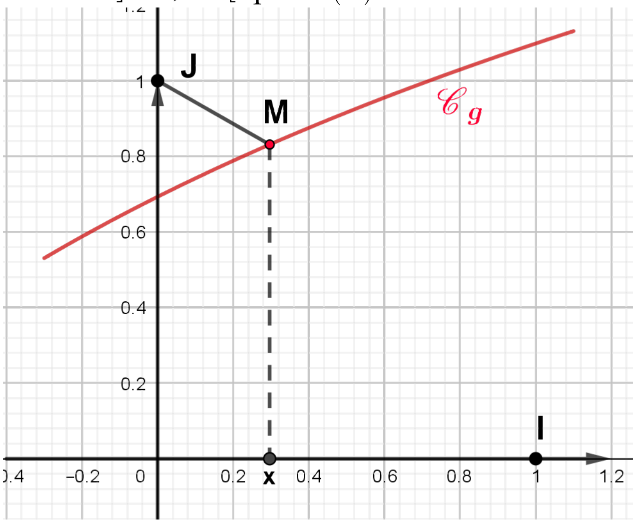
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de f(x) sur $]-2;+\infty[$.

6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(x+2)$.
On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O;I;J), représentée ci-après.
Soit M un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $h(x)=JM^2$.



1. Justifier que pour $x>-2$, on a : $h(x)=x^2+(\ln(x+2)-1)^2$.

2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
On admet également que pour tout réel $x>-2$: $h'(x)=\dfrac{2f(x)}{x+2}$ où f est la fonction étudiée en **partie B.**

2.a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;+\infty[$.
Les limites ne sont pas demandées.

2.b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question **4. de la partie B.**

3. On notera M_α le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.

3.a. Montrer que $\ln(\alpha+2)=1-2\alpha-\alpha^2$.

3.b. En déduire que la tangente $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.
On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

CORRECTION

Partie A

Par lecture graphique

1. $f(-1)=-2$

$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente $T=(AB)$ à $\mathscr{C}_f$ au point B.

$A(0;-1)$ et $B(-1;-2)$ donc $f'(-1)=\frac{-2+1}{-1}=1$.

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ n'est pas convexe sur $]-2;+\infty[$ car une partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la tangente T.

3. Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
Par lecture graphique, il y a un seul point d'intersection d'abscisse : 0,1.
L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution : 0,1.

Partie B

1. $x>-2$ $f(x)=x^2+2x-1+\ln(x+2)$

$\lim_{x\to-2}(x+2)=0$ et $\lim_{X\to0}\ln(X)=-\infty$ donc $\lim_{x\to-2}\ln(x+2)=-\infty$

$\lim_{x\to-2}x^2+2x-1=4-4-1=-1$

donc $\lim_{x\to-2}f(x)=-\infty$.

La droite d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

2. Pour tout réel $x>-2$, $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$.

$f'(x)=2x+2+\frac{1}{x+2}=\frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2}=\frac{2x^2+6x+5}{x+2}$.

3. Le signe de $f'(x)$ sur $]-2;+\infty[$ est le signe de $N(x)=2x^2+6x+5$.

$\Delta=6^2-4\times2\times5=-4<0$ donc $N(x)>0$ sur $]-2;+\infty[$.

f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.

x	-2	$+\infty$
f '(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4. f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-2;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α par f appartenant à $]-2;+\infty[$.
C'est à dire, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à $]-2;+\infty[$.
En utilisant la calculatrice on obtient : $\alpha=0,12$ à 10^{-2} près.

5. Si $-2<x<\alpha$ alors $f(x)<f(\alpha)=0$
Si $\alpha<x$ alors $f(\alpha)=0<f(x)$
On donne le signe de f(x) sous la forme d'un tableau

x	-2		α		$+\infty$
f(x)		−	0	+	

6. Pour $x>-2$, on a : $f'(x)=\dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$ f' est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$.

$u(x)=2x^2+6x+5$ $u'(x)=4x+6$ $v(x)=x+2$ $v'(x)=1$

$$f''(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}=\frac{(4x+6)(x+2)-(2x^2+6x+5)\times 1}{(x+2)^2}=\frac{4x^2+14x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2}$$

$f''(x)=\dfrac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$ le signe de $f''(x)$ sur $]-2\,;+\infty[$ est le signe de $N_1(x)=2x^2+8x+7$.

$\Delta=8^2-4\times 2\times 7=64-56=8=(2\sqrt{2})^2$

$x_1=\dfrac{-8-2\sqrt{2}}{4}=-2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<-2$ $x_2=\dfrac{-8-2\sqrt{2}}{4}=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\simeq -1{,}29>-2$

On utilise le signe du trinôme :

x	-2		x_2		$+\infty$
f ''(x)	||	−	0	+	
f(x)	||	concave		convexe	

donc le point I de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x_2 est l'unique point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Partie C

1. $x>-2$ $g(x)=\ln(x+2)$ $M(x\,;\ln(x+2))$ $J(0\,;1)$

$h(x)=MJ^2=(x-0)^2+(\ln(x+2)-1)^2=x^2+(\ln(x+2)-1)^2$

2.a. On admet que $h'(x)=\dfrac{2f(x)}{x+2}$ donc le signe de $h'(x)$ sur $]-2\,;+\infty[$ est le signe de $f(x)$.

Tableau de variation de h sur $]-2\,;+\infty[$.

x	-2		α		$+\infty$
h '(x)	||	−	0	+	
h(x)	||	↘	h(α)	↗	

$h(\alpha)$ est le minimum de h sur $]-2\,;+\infty[$.

2.b. La fonction carré (ou la fonction racine carrée) est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

donc $MJ=\sqrt{h(x)}$ admet pour valeur minimale $\sqrt{h(\alpha)}$.

3.a. $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-1+\ln(\alpha+2)=0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+2)=1-\alpha^2-2\alpha=g(\alpha)$.

3.b. $M_\alpha(\alpha\,;g(\alpha))$ $M_\alpha(\alpha\,;1-\alpha^2-2\alpha)$ $J(0\,;1)$

Le coefficient directeur de la droite (JM_α) est égal à : $\dfrac{1-\alpha^2-2\alpha-1}{\alpha-0}=\dfrac{-\alpha^2-2\alpha}{\alpha}=-\alpha-2$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α est $g'(\alpha)$.

Or $g'(x)=\dfrac{1}{x+2}$ donc $g'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+2}$.

Le produit des coefficient directeurs est égal à : $(-\alpha-2)\times\left(\dfrac{1}{\alpha+2}\right)=-1$

La droite (JM_α) et la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α sont perpendiculaires.

