Exercice 4 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit-être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :
$A(2;0;0)$, $B(0;4;3)$, $C(4;4;1)$, $D(0;0;4)$ et $H(-1;1;2)$.

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation : $8x-5y+2z-2=0$.

Affirmation 2 : les points A ; B ; C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (DH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-y+2z-2=0$.

Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

CORRECTION

Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$ il n'existe pas de nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}$ donc les points A ; B et C ne sont pas alignés et déterminent un plan

$\mathscr{P}$: $8x-5y+4z-16=0$.

$A(2;0;0)$ $8\times2-5\times0+4\times0-16=16-16=0$ le point A appartient au plan $\mathscr{P}$.

$C(4;4;1)$ $8\times4-5\times4+4\times1-16=32-20+4-16=0$ le point C appartient au plan $\mathscr{P}$.

$D(0;0;4)$ $8\times0-5\times0+4\times4-16=0$ le point D appartient au plan $\mathscr{P}$.

Donc $\mathscr{P}$=(ACD).

Affirmation 2 : FAUSSE

Preuve

Les points A ; B ; C et D sont coplanaires si et seulement si le point B appartient au plan (ACD).

$B(0;4;3)$ $8\times0-5\times4+4\times3-16=-20+12-16=-24\neq0$

Les points A ; B ; C ; D ne sont pas coplanaires.

Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

(AC) est la droite passant par $A(2;0;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$. (AC) : $\begin{cases}x=2t+2\\y=4t+0\\z=t+0\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

(BH) est la droite passant par $B(0;4;3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$. (BH) : $\begin{cases}x=-u+0\\y=-3u+4\\z=-u+3\end{cases}$ $u\in\mathbb{R}$.

Pour déterminer l'ntersection des droites (AC) et (BH), on résout le système :

$$\begin{cases}2t+2=-u\\4t=-3u+4\\t=-u+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t+u=-2 & (1)\\4t+3u=4 & (2)\\t+u=3 & (3)\end{cases}$$

On résout $\begin{cases}2t+u=-2 & (1)\\t+u=3 & (3)\end{cases}$ par addition, on obtient $t=-5$ et $u=8$.

On considère l'équation (2) $4t+3u=4\times(-5)+3\times8=-20+24=4$.

Donc les droites (AC) et (BH) sont sécantes au point $I(-8;-20;-5)$.

Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

Le point H est le projeté du point D sur le plan (ABC) si et seulement si H appartient au plan (ABC) et que (DH) est orthogonale au plan (ABC).

$H(-1;1;-2)$ (ABC) : $x-y+2z-2=0$

$-1-1+2\times2+2=-2+4-2=0$ le point H appartient au plan (ABC).

$\vec{N}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) et $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DH}=-\vec{N}$.

et H est le projeté orthogonal de D sur (ABC).