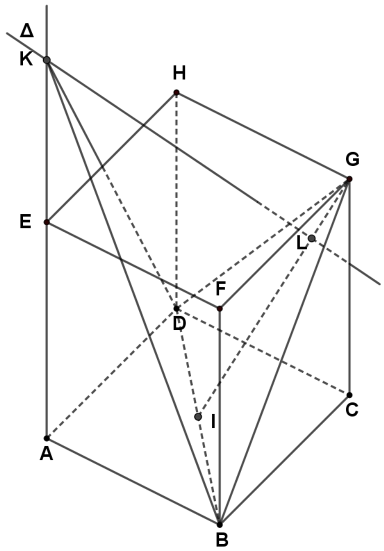
## Exercice 1 — 6 points

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.




Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$ .

On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ .

**1.a.** Préciser les coordonnées des points D, B, I et G. Aucune justification n'est attendue.

**1.b.** Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8};\frac{7}{8};\frac{3}{4}\right)$ .

**2.** Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x+y-z-1=0$ .

**3.** On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

**3.a.** Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est : $\begin{cases} x=\frac{7}{8}+t \\ y=\frac{7}{8}+t \\ z=\frac{3}{4}-t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ .

**3.b.** Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées : $\left(0;0;\frac{13}{8}\right)$ .

**3.c.** Que représente le point L pour le point K ? Justifier la réponse.

**4.a.** Calculer la distance KL.

**4.b.** On admet que le triangle BDG est équilatéral. Montrer que son aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**4.c.** En déduire le volume du tétraèdre KDBC.
On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule : $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

**5.** On désigne par a, un réel appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ et on note $K_a$ le point de coordonnées $(0;0;a)$ .

**5.a.** Exprimer le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide $ABCDK_a$ en fonction de a.

**5.b.** On note $\Delta_a$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

On appelle $L_a$ le point d'intersection de la droite $\Delta_a$ avec le plan (BDG).

Montrer que les coordonnées de $L_a$ sont $\left(\frac{a+1}{3} ; \frac{a+1}{3} ; \frac{2a-1}{3}\right)$.

**5.c.** Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre $GDBK_a$ et la pyramide $ABCDK_a$ sont de même volume.

**CORRECTION**

**1.a.** $D(0;1;0)$ $B(1;0;0)$ $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ $G(1;1;1)$.

**1.b.** $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}\frac{3}{8}\\\frac{3}{8}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\\\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\\0+\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}\frac{7}{8}\\\frac{7}{8}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ donc $L\left(\frac{7}{8};\frac{7}{8};\frac{3}{4}\right)$.

**2.** ABCDEFGH est un cube donc les points D, B et G ne sont pas alignés.
$x+y-z-1=0$ est une équation cartésienne de (DBG) si et seulement si les coordonnées des points D, B et G sont solutions de l'équation.
$D(0;1;0)$ $0+1-0-1=0$
$B(1;0;0)$ $1+0-0-1=0$
$G(1;1;1)$ $1+1-1-1=0$.

**3.a.** $\Delta$ est la perpendiculaire au plan (DBG) passant par L.

$x+y-z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (DBG) donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DBG) et $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $\Delta$.

$\Delta$ est la droite passant par $L\left(\frac{7}{8};\frac{7}{8};\frac{3}{4}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{n}$. $\Delta$ : $\begin{cases}x=\frac{3}{8}+t\\ y=\frac{3}{8}+t\\ z=\frac{3}{4}-t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

**3.b.** (AE) est la droite passant par A(0;0;0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $(AE)$ : $\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=u\end{cases}$ $u\in\mathbb{R}$.

Pour déterminer l'intersection des droites $\Delta$ et $(AE)$, on résout le système :

$$\begin{cases}\frac{3}{8}+t=0\\ \frac{3}{8}+t=0\\ \frac{3}{4}-t=u\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-\frac{7}{8}\\ \frac{3}{4}+\frac{7}{8}=u\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-\frac{7}{8}\\ u=\frac{13}{8}\end{cases}.$$

Donc les droites $\Delta$ et $(AE)$ sont sécantes en K de coordonnées $\left(0;0;\frac{13}{8}\right)$.

**3.c.** (KL) rst perpendiculaire au plan (DBG) et L appartient au plan (DBG) donc :
L est le projeté orthogonal de K sur le plan (DBG).

**4.a.** $K\left(0;0;\frac{13}{8}\right)$ $L\left(\frac{7}{8};\frac{7}{8};\frac{3}{4}\right)$ $KL^2=\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{13}{8}\right)^2=3\times\left(\frac{7}{8}\right)^2$ et $KL=\frac{7}{8}\sqrt{3}$.

**4.b.** DBG est un triangle équilatéral.
$D(0;1;0)$ $B(1;0;0)$ $DB^2=1^2+(-1)^2+0^2=2$ donc $DB=\sqrt{2}$.

I est le milieu de [DB] donc $DI=BI=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

GI est la hauteur du triangle DBG issue de G donc le triangle GDI est rectangle en I donc :

$$GD^2=GI^2+ID^2 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2=GI^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2=\frac{2}{4}+GI^2 \Leftrightarrow GI^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow GI=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

L'aire du triangle DBG est : $\mathscr{B}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**4.c.** Le volume du tétraèdre DBGK est : $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{7}{8}\sqrt{3}=\frac{7}{16}$.

**5.a.** $(EK_a)$ est perpendiculaire au plan (ABC) donc $EK_a$ est la hauteur de la pyramide $ABCDK_a$.
L'aire du carré ABCD est : $1\times1=1$ et $EK_a=a$.

Le volume de la pyramide $ABCDK_a$ est : $\mathcal{V}_a=\frac{1}{3}\times1\times a=\frac{a}{3}$.

**5.b.** $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $\Delta_a$ donc $\Delta_a$ est une droite perendiculaire au plan (DBG).
Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite $\Delta_a$ et du plan (DBG), on résout le système : $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x=t' \\ y=t' \\ z=-t'+a \end{cases}$.

On obtient : $t'+t'-(-t'+a)-1=0 \Leftrightarrow 3t'-a-1=0 \Leftrightarrow t'=\frac{a+1}{3}$

$x=\frac{a+1}{3}$ $\quad y=\frac{a+1}{3}$ $\quad z=-\frac{a+1}{3}+a=\frac{2a-1}{3}$ $\qquad L_a\left(\frac{a+1}{3};\frac{a+1}{3};\frac{2a-1}{3}\right)$.

**5.c.** $K_aL_a^2=\left(\frac{a+1}{3}\right)^2+\left(\frac{a+1}{3}\right)^2+\left(\frac{2a-1}{3}-a\right)^2=3\left(\frac{a+1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow K_aL_a=\frac{\sqrt{3}}{3}(a+1)$

Le volume tétraèdre $DBGK_a$ est : $\mathcal{V}'_a=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}(a+1)=\frac{a+1}{6}$.

La pyramide $ABCDK_a$ et le tétraèdre $DBGK_a$ ont le même volume si et seulement si :
$\frac{a}{2}=\frac{a+1}{6} \Leftrightarrow 2a=a+1 \Leftrightarrow a=1$