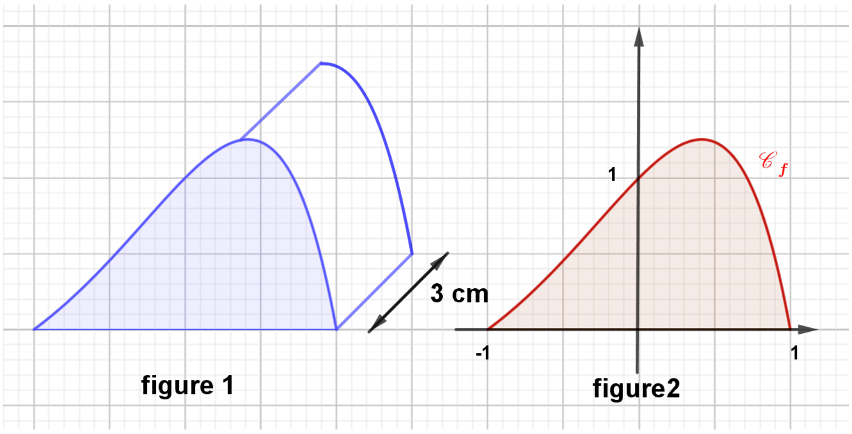
Exercice 2 — 5 points

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montagne locale représentée en **figure 1**. La base du bonbon est modélisée par la surface colorée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**figure 2**).



Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur [-1;1] par : $f(x)=(1-x^2)e^x$.

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1.a. Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle [-1;1], on a : $f(x)\geqslant 0$.

1.b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{-1}^{1} x e^x\,dx$$

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :
$\mathscr{V} = 3\times S$ où S est l'aire en cm^2, de la surface colorée (**figure 2**).
En déduire que ce volume $\mathscr{V}$ arrondi à 0,1 cm^3, est égal à 4,4 cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0{,}01;+\infty[$ par :
$B(q)=8q^2(2-3\ln(q))-3$.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0{,}01;+\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1.a. Déterminer : $\lim\limits_{q\to+\infty} B(q)$.

1.b. Montrer que, pour tout $q\geqslant 0{,}01$: $B'(q)=8q(1-6\ln(q))$.

1.c. Étudier le signe de $B'(q)$ et en déduire le sens de variation de B sur $[0{,}01;+\infty[$.
Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

1.d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2.a. Montrer que l'équation $B(q)=10$ admet une unique solution β sur $[1{,}2;+\infty[$.
Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.
On admet que l'équation $B(q)=10$ admet une unique solution α sur $[0{,}01;1{,}2[$. On donne $\alpha=0{,}757$.

2.b. En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

CORRECTION

Partie A

1.a. On donne le signe du trinôme $T(x)=1-x^2$ sur $\mathbb{R}$ sous la forme d'un tableau. $T(1)=T(-1)=0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour tout nombre réel x, on a : $e^x>0$.

Donc pour tout nombre réel x de l'intervalle [-1;1], on a : $f(x)=(1-x^2)e^x\geqslant 0$.

1.b. $f(x)=(1-x^2)e^x$

$u(x)=1-x^2$ $\quad u'(x)=-2x$

$v'(x)=e^x$ $\quad v(x)=e^x$

u et v sont dérivables et u' et v' sont continues sur [-1;1].

En utilisant la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)e^x\,dx=[(1-x^2)e^x]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(-2xe^x)\,dx=[(1-x^2)e^x]_{-1}^{1}+2\int_{-1}^{1}xe^x\,dx$$

$$[(1-x^2)e^x]_{-1}^{1}=0\times e-0\times e^{-1}=0$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=2\int_{-1}^{1}xe^x\,dx$$

2. L'aire, en unité d'aire, de la partie colorée est l'aire de la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses sur $[-1;1]$ donc cette aire est égale à : $2\int_{-1}^{1}xe^x\,dx$.

Pour calculer $\int_{-1}^{1}xe^x\,dx$ on effectue de nouveau une intégration par parties :

$u_1(x)=x$ $\quad u'_1(x)=1$

$v'_1(x)=e^x$ $\quad v_1(x)=e^x$

$$\int_{-1}^{1}xe^x\,dx=[xe^x]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}e^x\,dx=e+e^{-1}-[e^x]_{-1}^{1}=e+e^{-1}-(e-e^{-1})=2e^{-1}\ ;$$

$$\int_{-1}^{1}xe^x=2e^{-1}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1}f(x)=4e^{-1}\,dx$$

Si l'unité de longueur est égale à 2 cm alors l'unité d'aire est $2^2\ cm^2=4\ cm^2$ donc l'aire de la partie colorée de la **figure 2** est égale à $S=4\times 4e^{-1}=16e^{-1}\ cm^2$;

Le volume de chocolat est : $\mathscr{V}=3\times 16\times e^{-1}\ cm^3\simeq 17{,}7\ cm^3$.

Si l'unité de longueur est égale à 1 cm alors l'unité d'aire est égale à 1 cm^2 et $S=4e^{-1}\ cm^2$.

Le volume de chocolat est : $\mathscr{V}=3\times 4e^{-1}\ cm^3\simeq 4{,}4\ cm^3$.

Partie B

1.a. x appartient à $[0{,}01;+\infty[$.

$B(q)=8q^2(2-3\ln(q))-3$

$\lim\limits_{q\to+\infty}\ln(q)=+\infty$ et $\lim\limits_{q\to+\infty}(2-3\ln(q))=-\infty$ et $\lim\limits_{q\to+\infty}8q^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{q\to+\infty}8q^2(2-3\ln(q))=-\infty$

et $\lim\limits_{q\to+\infty}B(q)=-\infty$.

1.b. $(\ln(q))'=\dfrac{1}{q}$ $\quad (8q^2)'=16q$

$$B'(q)=16q(2-3\ln(q))+8q^2\left(\frac{-3}{q}\right)=32q-48q\ln(q)-24q=8q-48q\ln(q) \qquad B'(q)=8q(1-6\ln(q))$$

1.c. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0{,}01\,;+\infty[$, on a : $8q>0$ donc le signe de $B'(q)$ est le signe de (1-6ln(q)).

$$1-6\ln(q)=0 \iff 1=6\ln(q) \iff \ln(q)=\frac{1}{6} \iff q=e^{\frac{1}{6}}\simeq 1{,}157$$

$$1-6\ln(q)>0 \iff 1>6\ln(q) \iff \frac{1}{6}>\ln(q) \iff e^{\frac{1}{6}}>q\geqslant 0{,}01$$

Tableau de variation de B

q	0.01		$e^{\frac{1}{6}}$		$+\infty$
B'(q)		+	0	−	
B(q)	a	↗	M	↘	$-\infty$

$a=B(0{,}01)\simeq -2{,}987$

$$M=B\left(e^{\frac{1}{6}}\right)=8\left(e^{\frac{1}{6}}\right)^2\times\left(2-3\times\frac{1}{6}\right)-3=8\,e^{\frac{1}{3}}\times\frac{3}{2}-3=12\,e^{\frac{1}{3}}-3\simeq 13{,}747\ .$$

1.d. $e^{\frac{1}{6}}\simeq 1{,}16$ pour $q=1{,}16$ centaines de bonbons soient 116 bonbons le bénéfice est maximal : 13,7 dizaines d'euros soit 137 €.

2.a. B est strictement décroissante et continue sur $[1{,}2\,;+\infty[$, à valeurs dans $]-\infty\,;M]$, 10 appartient à cet intervalle, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un réel β unique appartenant à l'intervalle $[1{,}2\,;+\infty[$ tel que $B(\beta)=10$.

En utilisant la calculatrice par dichotomie ou par balayage, on obtient $\beta\simeq 1{,}558$ à 10^{-3} près.

On admet qu'il existe un unique nombre réel α appartenant à $[0{,}01\,;1{,}2[$ tel que $B(\alpha)=10$.

$\alpha\simeq 0{,}757$ à 10^{-3} près.

2.b.

q	0.01		α		$e^{\frac{1}{6}}$		β		$+\infty$
B(q)	-3	↗	10	↗	13.7	↘	10	↘	$-\infty$

$\alpha=0{,}757$ centaines de bonbons soit 76 bonbons à l'unité près.

$\beta=1{,}558$ centaines de bonbons soit 156 bonbons à l'unité près.

Pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros (soit 10 dizaines d'euros), le nombre minimal de bonbons à vendre est 76 et le nombre maximal est 176.