Exercice 3 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle st vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les cinq questions sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :
pour tout entier naturel n, $t_{n+1}=-0{,}8\,t_n+18$
Affirmation 1 :
La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n=t_n-10$ est géométrique.

2. On considère la suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul : $3n-4\leqslant S_n\leqslant 3n+4$.
La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n=\dfrac{S_n}{n}$.
Affirmation 2 :
La suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par : $v_1=2$ et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$: $v_{n+1}=2-\dfrac{1}{v_n}$.
Affirmation 3 :
Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$: $v_n=\dfrac{n+1}{n}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n=e^n-n$.
Affirmation 4 :
La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def u_n:
  valeur=2
  for k in range(n):
    valeur=0.5*('valeur+2/valeur)
  return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n : $\sqrt{2}\leqslant u_n\leqslant 2$.
Affirmation 5 :
La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

Pour tout entier naturel n, on a : $t_{n+1}=-0,8\,t_n+18$ et $w_n=t_n-10 \Leftrightarrow t_n=w_n+10$

$w_{n+1}=t_{n+1}-10=-0,8\,t_n+18-10=-0,8(w_n+10)+8=-0,8\,w_n-8+8=-0,8\,w_n$.

La suite (w_n) est une suite géométrique de raison : -0,8.

2. Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a : $3n-4\leqslant S_n\leqslant 3n+4$ donc $3-\frac{4}{n}\leqslant\frac{S_n}{n}\leqslant 3+\frac{4}{n} \Leftrightarrow 3-\frac{4}{n}\leqslant u_n\leqslant 3+\frac{4}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\frac{4}{n}\right)=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\frac{4}{n}\right)=3$.

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

3. Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

$v_1=2$ et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$: $v_n=2-\frac{1}{v_n}$;

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier $n\geqslant 1$, on a : $v_n=\frac{n+1}{n}$.

Initialisation

pour $n=1$ on a : $v_1=2$ et $\frac{1+1}{1}=\frac{2}{1}=2$ donc la propriété est vérifiée pour $n=1$;

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on suppose que $v_n=\frac{n+1}{n}$ et on doit démontrer que $v_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$.

Or $v_{n+1}=2-\frac{1}{v_n}=2-\frac{n}{n+1}=\frac{2(n+1)}{n+1}-\frac{n}{n+1}=\frac{2n+2-n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour entier naturel $n\geqslant 1$, on a : $v_n=\frac{n+1}{n}$.

4. Affirmation 4 : FAUSSE

Preuve

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_n=n\times\left(\frac{e^n}{n}-1\right)$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n}=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

La suite (u_n) n'est pas convergente.

5. Affirmation 5 : VRAIE

Preuve

La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ donc la suite (u_n) est convergente.

On note $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=L$. On a $\sqrt{2}\leqslant L\leqslant 2$

Le script nous donne : $u_0=2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0,5\times\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$.

Donc $L=0,5\times\left(L+\frac{2}{L}\right) \Leftrightarrow L=0,5L+\frac{1}{L} \Leftrightarrow 0,5L=\frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2=2 \Leftrightarrow L=\sqrt{2}$ (car $\sqrt{2}\leqslant L$)

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés