Exercice 4 4 points

Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production.
On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.
On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de100 cachets associe le nombre de cachets non conforme dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont ont précisera les paramètres.

2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

3. *On arrondira les résultats à 10^{-3} près.*
3.a. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3.b. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.

4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer :
« La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».
Combien de cachets par boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i pour i entier naturel compris entre 1 et 100 cachets, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du $i^{\text{ème}}$ cachet prélevé.
On considère la variable aléatoires S définie par : $S=M_1+M_2+\ldots+M_{100}$.
On admet que les variables aléatoires $M_1\ldots M_{100}$ suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu=2$ et d'écart-type σ .

1. Déterminer E(S) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. On note s l'écart-type de la variable aléatoire S. Montrer $s=10\sigma$.

3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.
3.a. Montrer que cette condition est équivalente à : $P(|S-200|\geqslant 1)\leqslant 0,1$
3.b. En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.

CORRECTION

Partie A

1. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
on choisit au hasard un comprimé de la chaîne de production ;
Succès S : « le comprimé a une masse non conforme ». Probabilité de succès : $p=P(S)=\frac{2}{100}=0{,}02$.
Échec $\overline{S}$: « le comprimé a une masse conforme ». Probabilité de l'échec : $q=P(\overline{S})=1-0{,}02=0{,}98$.
On choisit de manière indépendante 100 comprimés, c'està dire on effectue 100 épreuves de Bernoulli indépendantes, N est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 100 épreuves.
La loi de probabilité de N est la loi binomiale de paramètres : $n=100$ et $p=0{,}02$.

2. $E(N)=np=100\times 0{,}02=2$ **.**
En moyenne il y a 2 comprimé non conformes dans chaque boîte de 100 comprimés.

3.a. En utilisant la calculatrice on obtient :
$$P(N=3)=\binom{100}{3}\times 0{,}02^3\times 0{,}98^{97}\simeq 0{,}182$$
3.b. $P(N\leqslant 5)\simeq 0{,}985$

4. Si une boîte contient n comprimés (n entier naturel non nul) alors la probabilité qu'une boîte ne contienne que des comprimés conformes est : $q^n=0{,}98^n$.
Le directeur du laboratoire désire que : $q^n=0{,}98^n\geqslant 0{,}5$.
La fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$.
$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}98^n)\geqslant \ln(0{,}5) \quad \Leftrightarrow \quad n\times\ln(0{,}98)\geqslant \ln(0{,}5)$
$0<0{,}98<1$ donc $\ln(0{,}98)<0$
$$\Leftrightarrow \quad n\leqslant \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)}\simeq 34{,}3$$
n est un entier naturel
$\Leftrightarrow \quad n\leqslant 34$
Il faut au maximum 34 comprimés par boîte pour que la probabilité, qu'une boîte ne contienne que des comprimés conformes, est supérieure à 0,5.

Partie B

1. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 100 on a : $E(M_i)=2$.
$E(S)=E(M_1+M_2+\ldots+M_{100})=E(M_1)+E(M_2)+\ldots+E(M_{100})=100\times 2=200$

2. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 100 on a : $V(M_i)=\sigma^2$
$V(S)=s^2=V(M_1+M_2+\ldots+M_{100})=V(M_1)+V(M_2)+\ldots+V(M_{100})=100\sigma^2$
$s=\sqrt{100\sigma^2}=10\sigma$

3.a. $199<S<201 \quad \Leftrightarrow \quad |S-E(S)|<1$ donc $P(199<S<201)\geqslant 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad P(|S-E(S)|<1)\geqslant 0{,}9$
Pour l'événement contraire : $P(|S-E(S)|\geqslant 1)\leqslant 0{,}1$.
3.b. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne pour tout réel strictement positif δ , on a :
$P(|S-E(S)|\geqslant\delta)\leqslant\frac{V(S)}{\delta}$ pour $\delta=1$ on a : $P(|S-E(S)|\geqslant 1)\leqslant\frac{V(S)}{\delta}=s^2=100\sigma^2$
On doit avoir : $100\sigma^2\leqslant 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma^2\leqslant 0{,}001 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\leqslant\sqrt{0{,}001}\simeq 0{,}0316$
La valeur maximale de σ pour obtenie l'inégalité demandée est : 0,0316.