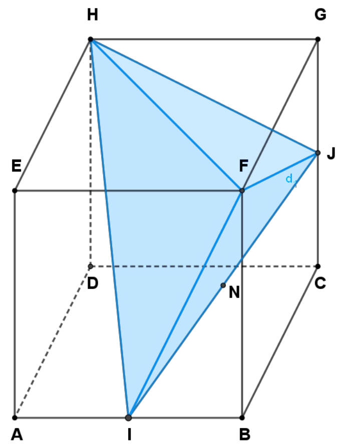
Exercice 1 5 points

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.
Les points I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [IJ].
Le point N est le milieu de [IJ].
L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre HFIJ.
On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$;



1.a. Déterminer les coordonnées des points I et J.
En déduire les coordonnées de N.

1.b. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ ont pour coordonnées respectives : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0,5\\1\\0,5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}0,25\\-0,5\\0,75\end{pmatrix}$.

1.c. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ sont orthogonaux.
On admet que : $NF=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

1.d. En déduire que l'aire du triangle FIJ est égale à $\left(\dfrac{\sqrt{21}}{8}\right)$.

2. On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

2.a. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (FIJ).
2.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est : $4x-y-2z-2=0$.
2.c. On note d la droite orthogonale au plan (FIJ) passant par le point H. déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2.d. Montrer que la distance du point H au plan (FIJ) est égale à $\dfrac{5\sqrt{21}}{21}$.

2.e. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule : $V=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$ où $\mathscr{B}$ l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.
Calculer le volume du tétraèdre HFIJ. On donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

CORRECTION

1.a. $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ donc $I(0,5;0;0)$ $C(1;1;0)$ $G(1;1;1)$ donc $J(1;1;0,5)$
et $N(0,75;0,5;0,25)$

1.b. $\vec{IJ}\begin{pmatrix}1-0,5\\1-0\\0,5-0\end{pmatrix}$ $\vec{IJ}\begin{pmatrix}0,5\\1\\0,5\end{pmatrix}$ $F(1;0;1)$ $\vec{NF}\begin{pmatrix}1-0,75\\0-0,5\\1-0,25\end{pmatrix}$ $\vec{NF}\begin{pmatrix}0,25\\-0,5\\0,75\end{pmatrix}$.

1.c. $\vec{IJ}.\vec{NF}=0,5\times0,25+1\times(-0,5)+0,5\times0,75=0,125-0,5+0,375=0$
Les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{NF}$ sont orthogonaux.

On admet que : $NF=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ (en unité de longueur).

1.d. On considère le triangle FIJ. Les droites (IJ) et (NF) sont perpendiculaires et N appartient à (IJ) donc NF est la hauteur du triangle du triangle FIJ issue de F.

$IJ^2=0,5^2+1^2+0,5^2=0,25+1+0,25=1,5=\dfrac{3}{2}$ donc $IJ=\sqrt{1,5}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (unité de longueur).

L'aire du triangle FIJ, en unité d'aire, est : $\mathcal{A}_{FIJ}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{\dfrac{3}{2}}\times\dfrac{\sqrt{14}}{4}=\dfrac{1}{8}\times\sqrt{\dfrac{42}{2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{8}$.

2.a. Le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (FIJ) si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FIJ) par exemples : $\vec{IJ}$ et $\vec{NF}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{IJ}\begin{pmatrix}0,5\\1\\0,5\end{pmatrix}$ $\vec{NF}\begin{pmatrix}0,25\\-0,5\\0,75\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\vec{IJ}=4\times0,5-1\times1-2\times0,5=2-1-1=0$
$\vec{u}.\vec{NF}=4\times0,25-1\times(-0,5)-2\times0,75=1+0,5-1,5=0$

Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).

2.b. Le plan (FIJ) est le plan passant par F et de vecteur normal $\vec{u}$.
$M(x;y;z)$ appartient au plan (FIJ) si et seulement si $\vec{u}.\vec{FM}=0$.

$F(1;0;1)$ $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{FM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\vec{FM}=0 \Leftrightarrow 4\times(x-1)-1\times(y-0)-2\times(z-1)=0 \Leftrightarrow 4x-4-y-2y+2=0$
$\Leftrightarrow 4x-y-2z-2=0$

2.c. d est la droite passant par $H(0;1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$.

$M(x;y;z)\in d$ si et seulement si $\begin{cases}x=4t+0\\y=-t+1\\z=-2t+1\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

2.d. d est orthogonale au plan (FIJ) donc d et (FIJ) sont sécants en K.

Pour calculer les coordonnées de K on résout le système : $\begin{cases}4x-y-2z-2=0\\x=4t\\y=-t+1\\z=-2t+1\end{cases}$ on obtient :

$4\times(4t)-(-t+1)-2\times(-2t+1)-2=0 \Leftrightarrow 16t+t-1+4t-2-2=0 \Leftrightarrow 21t-5=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{5}{21}$

$x=4\times\dfrac{5}{21}=\dfrac{20}{21}$ $y=-\dfrac{5}{21}+1=\dfrac{16}{21}$ $z=-2\times\dfrac{5}{21}+1=-\dfrac{10}{21}+1=\dfrac{11}{21}$ $K\left(\dfrac{20}{21};\dfrac{16}{21};\dfrac{11}{21}\right)$

HK est la distance du point H au plan (FIJ).

$HK^2=\left(\dfrac{20}{21}-0\right)^2+\left(\dfrac{16}{21}-1\right)^2+\left(\dfrac{11}{21}-1\right)^2=\dfrac{20^2}{21^2}+\dfrac{(-5)^2}{21^2}+\dfrac{(-10)^2}{21^2}=\dfrac{400+25+100}{21^2}=\dfrac{525}{21^2}=\dfrac{25\times21}{21^2}$

$\mathrm{HK}=\frac{\sqrt{25\times 21}}{21}=\frac{5\sqrt{21}}{21}$.

2.c. Le volume du tétraèdre HFIJ ,en unité de volume, est : $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times\mathrm{h}$ où $\mathcal{B}=\frac{\sqrt{21}}{8}$ aire de la base FIJ et $\mathrm{h}=\mathrm{HK}=\frac{5\sqrt{21}}{21}$ hauteur du tétraèdre issue de H.

$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{8}\times\frac{5\sqrt{21}}{21}=\frac{5}{24}$