Exercice 1 — 5 points

La partie C est indépendante des parties A et B.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.

Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\frac{1}{3}$.

S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau vers la droite lors du déplacement suivant est égale à $\frac{3}{4}$.

S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau vers la gauche lors du déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

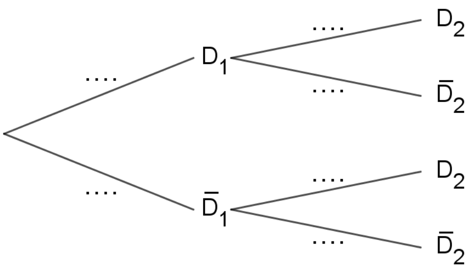
. D_n l'événement : « le robot se déplace à droite lors du $n^{\text{ième}}$ déplacement » ;
. $\overline{D}_n$ l'événement contraire de D_n ;
. p_n la probabilité de D_n.

On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier $n=2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.

3. Montrer que $p_2 = \frac{7}{12}$.

4. Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement.
Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement ?

Partie B : étude de (p_n)

On souhaite estimé le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.

On pourra s'aider d'un arbre.

2.a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

2.b. La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $u_n = p_n - \frac{2}{3}$.

3.a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et précise son premier terme et sa raison.

3.b. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C :
Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre, indépendants les uns des autres.

Chaque déplacement vers la droite ayant une une probabilité fixe de $\frac{3}{4}$.

Quelle est la probabilité, qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements.
On arrondira à 10^{-3} près.

CORRECTION

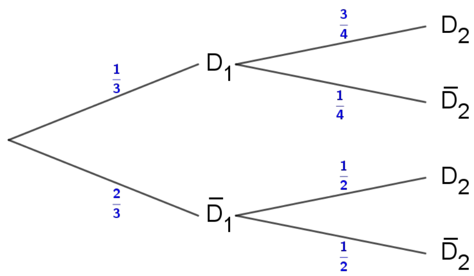
Partie A

1. $p_1 = P(D_1) = \frac{1}{3}$ donc $P(\bar{D}_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P_{D_1}(D_2) = \frac{3}{4}$ donc $P_{D_1}(\bar{D}_2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P_{\bar{D}_1}(\bar{D}_2) = \frac{1}{2}$ donc $P_{\bar{D}_1}(D_2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

3. En utilisant la formule des probabilités totales :

$p_2 = P(D_1 \cap D_2) + P(\bar{D}_1 \cap D_2)$

$P(\bar{D}_1 \cap D_2) = P(\bar{D}_1) \times P_{\bar{D}_1}(D_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

4. On nous demande de calculer : $P_{\bar{D}_2}(D_1)$.

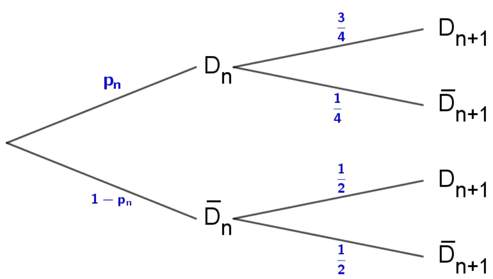
$P_{\bar{D}_2}(D_1) = \frac{P(D_1 \cap \bar{D}_2)}{P(\bar{D}_2)}$ $\quad P(D_1 \cap \bar{D}_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(\bar{D}_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P(\bar{D}_2) = 1 - p_2 = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

$P_{\bar{D}_2}(D_1) = \frac{1}{12} : \frac{5}{12} = \frac{1}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Partie B

1.



$p_{n+1} = P(D_{n+1}) = P(D_n \cap D_{n+1}) + P(\bar{D}_n \cap D_{n+1})$

$p_{n+1} = P(D_n) \times P_{D_1}(D_{n+1}) + P(\bar{D}_1) \times P_{\bar{D}_1}(D_2)$

$p_{n+1} = p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} p_n$

$p_{n+1} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) p_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$.

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

Initialisation

$p_1 = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ $\quad p_2 = \frac{7}{12}$ $\quad \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ donc $p_1 \leqslant p_2 < \frac{2}{3}$

La propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier $n \geqslant 1$, on suppose que $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$ et on doit démontrer que $p_{n+1} \leqslant p_{n+2} < \frac{2}{3}$

Si $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$ alors $\frac{1}{4} p_n \leqslant \frac{1}{4} p_{n+1} < \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4} p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$.

Or $\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2} = p_{n+1}$ et $\frac{1}{4} p_{n+1} + \frac{1}{2} = p_{n+2}$ et $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On obtient : $p_{n+1} \leqslant p_{n+2} < \frac{2}{3}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

2.b. Pour $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$ donc la suite (p_n) est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$, toute suite croissante et majorée est convergente, donc (p_n) est une suite convergente.

3.a. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $u_n = p_n - \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad p_n = u_n + \frac{2}{3}$.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} p_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} u_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} u_n$$

(u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme : $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

3.b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ $\quad u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$0 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$p_n = u_n + \frac{2}{3}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{3}$.

À long terme,la probabilité de D_n sera voisine de $\frac{2}{3}$ donc le robot aura deux fois plus de chance d'aller à droite que d'aller à gauche.

Partie C

On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
Le robot réalise un déplacement.

Succès S : « le robot réalise un déplacement à droite » la probabilité de succès est : $p = P(S) = \frac{3}{4}$.

Échec $\bar{S}$: « le robot réalise un déplacement à gauche » la probabilité de l'échec est : $q = P(\bar{S}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Les déplacements sont indépendants les uns des autres. Le robot effectue 10 déplacements.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès en 10 épreuves de Bernoulli indépendantes

la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{3}{4}$;

Le robot revient à son point de départ au bout de 10 déplacements si et seulement s'il a effectué 5 déplacements à droite et 5 déplacements à gauche, donc la probabilité que le robot revienne à son point de départ est :

$$P(X=5)=\binom{10}{5}\times\left(\frac{3}{4}\right)^5\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

En utilisant la calculatrice.

$P(X=5)\simeq 0{,}058$ à 10^{-3} près.