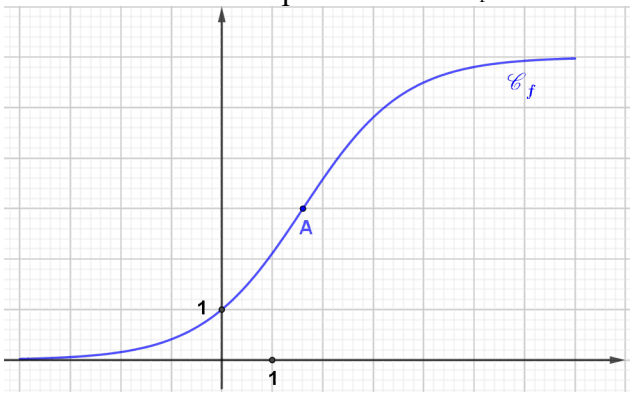
Exercice 3 — 5 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{6}{1+5e^{-x}}$.

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5;3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Montrer que la droite d'équation $y=6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3.a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x)=\dfrac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}$.

3.b. En déduire le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que :

. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde ;

. pour tout réel x, $f''(x)=\dfrac{30e^{-x}(5e^{-x}+1)}{(1+5e^{-x})^3}$.

4.a. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

On montrera en particulier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.

4.b. Justifier que pour tout réel x appartenant à $]-\infty;\ln 5]$, $f(x)\geqslant\dfrac{5}{6}x+1$.

5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_k(x)=k\ln(e^x+5)$

où k est une constante réelle.

5.a. Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

5.b. En déduire que l'aire,en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln 5$ est égale à $6\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

(E) : $y'=y-\dfrac{1}{6}y^2$.

On rappelle qu'une solution de (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a : $u'(x)=u(x)-\dfrac{1}{6}[u(x)]^2$.

1. Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2. Résoudre l'équation différentielle : $y' = -y + \frac{1}{6}$.

3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h.

3.a. Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$ alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

3.b. Pour tout réel positif m, on considère les fonctions g_m définies sur $\mathbb{R}$ par : $g_m(x) = \frac{6}{1 + 6me^{-x}}$.

Montrer que pour tout réel positif m, la fonction g_m est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{6}{1+5e^{-x}}$ donc $f(\ln(5))=\dfrac{6}{1+5e^{-\ln 5}}$ $e^{-\ln 5}=e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}=\dfrac{1}{5}$

$f(\ln 5)=\dfrac{6}{1+5\times\frac{1}{5}}=\dfrac{6}{2}=3$

Le point A(ln(5);3) appartient à $\mathscr{C}_f$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{6}{1+0}=6$.

La droite d'équation y=6 est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

3.a. $u(x)=1+5e^{-x}$ $u'(x)=5\times(-e^{-x})=-5e^{-x}$

$f'(x)=6\times\dfrac{-(-5e^{-x})}{(1+5e^{-x})^2}=\dfrac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}$.

3.b. Pour tout nombre réel x, $e^{-x}>0$ donc $f'(x)>0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$.

Conséquence : $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+5e^{-x})=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

Tableau de variation de f.

x	-∞		+∞
f '(x)		+	
f(x)	0	↗	6

4.a. $f''(x)=\dfrac{30e^{-x}(5e^{-x}+1)}{(1+5e^{-x})^3}$

Pour tout réel x, $1+5e^{-x}>0$ donc $\dfrac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^3}>0$ et le signe de $f''(x)$ est le signe de $5e^{x}-1$.

$5e^{-x}-1=0 \Leftrightarrow 5e^{-x}=1 \Leftrightarrow e^{-x}=\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow -x=\ln\left(\dfrac{1}{5}\right) \Leftrightarrow x=-\ln\left(\dfrac{1}{5}\right) \Leftrightarrow x=\ln 5$.

$5e^{-x}-1>0 \Leftrightarrow 5e^{-x}>1 \Leftrightarrow e^{-x}>\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow e^{-x}>e^{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \Leftrightarrow -x>\ln\left(\dfrac{1}{5}\right) \Leftrightarrow x<-\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)=\ln 5$.

On donne la convexité de f sous la forme d'un tableau.

x	-∞	ln5	+∞
f ''(x)	+	–	
convexité de f	convexe	concave	

$f(\ln 5)=3$ et $f''(\ln 5)=0$ f'' s'annule en changeant de signe en ln5 donc le point A(ln5;3) est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

$f'(\ln 5)=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

La tangente au point A est la droite passant par A et de coefficient directeur $\dfrac{3}{2}$.

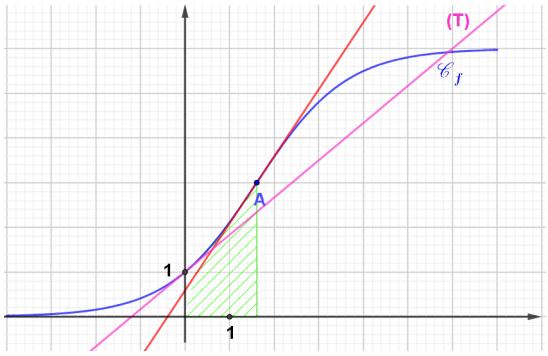
Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

4.b. On a $f(0)=1$, on détermine l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées (0;1).

$f'(0)=\dfrac{30e^0}{(1+5e^0)^2}=\dfrac{30}{36}=\dfrac{5}{6}$ et l'ordonnée à l'origine de (T) est : 1.

(T): $y=\dfrac{5}{6}x+1$

$\mathscr{C}_f$ est convexe sur $]-\infty;\ln 5]$ donc la partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $]-\infty;\ln 5]$ est au dessous de (T) pour x appartenant à $]-\infty;\ln 5]$, $f(x)\geqslant\dfrac{5}{6}x+1$.



5. Pour tout nombre réel x, $F_k(x)=k\ln(e^x+5)$ k est une constante réelle.

5.a. F_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\quad(\ln(u(x)))'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

$F_k'(x)=k\times\dfrac{e^x}{e^x+5}=k\times\dfrac{e^x\times e^{-x}}{(e^x+5)\times e^{-x}}=k\times\dfrac{1}{1+5e^{-x}}$

F_k est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x :

$k\times\dfrac{1}{1+5e^{-x}}=\dfrac{6}{1+5e^{-x}}\quad\Leftrightarrow\quad k=6$

F_6 est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

5.b. L'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation : $x=\ln 5$ est $\displaystyle\int_0^{\ln 5} f(x)\,dx$ car f est continue et positive sur [0;ln5].

$\displaystyle\int_0^{\ln 5} f(x)\,dx=[F_6(x)]_0^{\ln 5}=[6\ln(e^x+5)]_0^{\ln 5}=6\ln(5+5)-6\ln 6=6\ln\left(\frac{10}{6}\right)=6\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ en unité d'aire.

Partie B

1. Pour démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), il suffit de vérifier que pour tout réel x, on a : $f'(x)=f(x)-\dfrac{1}{6}(f(x))^2$.

$f(x)=\dfrac{6}{1+5e^{-x}}$ et $f'(x)=\dfrac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}$

Or $f(x)-\dfrac{1}{6}(f(x))^2=\dfrac{6}{1+5e^{-x}}-\dfrac{1}{6}\times\dfrac{36}{(1+5e^{-x})^2}=\dfrac{6(1+5e^{-x})-6}{(1+5e^{-x})^2}=\dfrac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2}=f'(x)$.

2. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x)=ke^{ax}-\dfrac{b}{a}$ avec k constante réelle.

Pour $a=1$ et $b=\dfrac{1}{6}$ $\quad f_k(x)=ke^{-x}+\dfrac{1}{6}$ avec k constante réelle.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

3. Pour tout réel x, $g(x)\neq 0$ et $h(x)=\dfrac{1}{g(x)}$.

3.a. Si h est solution de l'équation différentielle : $y'=-y+\dfrac{1}{6}$ alors pour tout réel x, on a :

$h'(x)=-h(x)+\dfrac{1}{6}$.

$h(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ et $h'(x)=\dfrac{-g'(x)}{(g(x))^2}$

donc pour tout réel x : $\dfrac{-g'(x)}{(g(x))^2}=-\dfrac{1}{g(x)}+\dfrac{1}{6}$ $\Leftrightarrow$ $-g'(x)=-g(x)+\dfrac{1}{6}(g(x))^2$

$\Leftrightarrow$ $g'(x)=g(x)-\dfrac{1}{6}(g(x))^2$

g est solution de l'équation différentielle (E) $y'=y-\dfrac{1}{6}y^2$.

3.b. Pour tout nombre réel x et pour nombre réel positif m on a : $g_m(x)=\dfrac{6}{1+6me^{-x}}\neq 0$.

$h_m(x)=\dfrac{1}{g_m(x)}=\dfrac{1+6me^{-x}}{6}=me^{-x}+\dfrac{1}{6}$

$h_m'(x)=-me^{-x}$ et $-h_m(x)+\dfrac{1}{6}=-me^{-x}$

donc $h_m'=-h_m(x)+\dfrac{1}{6}$

h_m est solution de l'équation différentielle $y'=-y+\dfrac{1}{6}$ donc g_m est solution de l'équation :

$y'=y-\dfrac{1}{6}y^2$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés