Exercice 4 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

```
def Seuil(S):
  n=0
  u=7
  while u<S:
    n=n+1
    u=1.05*u+3
  return n
```

Affirmation 1 : l'instruction Seuil(100) renvoie la valeur 18.

2. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}$$

Affirmation 2 : la suite (S_n) converge vers $\frac{5}{4}$.

3. **Affirmation 3 :** dans une classe composée de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents.

4. On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.
Affirmation 4 : l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

5. **Affirmation 5 :** $\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx = \frac{e-2}{e}$

CORRECTION

1. Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=7$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}05\,u_n+3$.
Seuil(100) renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 100$.
En utilisant la calculatrice et si possible un tableur, on obtient :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
u_n	7	10.35	13.17	17.56	21.44	25.51	29.79	34.28	38.99	43.94	49.14	54.59	60.32	66.34	72.66	79.29	86.25	93.57	101.24	109.31

(on arrondit les valeurs à 10^{-2} près)
Donc Seuil(100) renvoie 18.

2. Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

S_n est la somme des (n+1) premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{5}$.

$$S_n-\frac{1}{5}S_n=1-\frac{1}{5^{n+1}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{5}S_n=1-\frac{1}{5^{n+1}} \quad\Leftrightarrow\quad S_n=\frac{5}{4}\times\left(1-\frac{1}{5^{n+1}}\right)$$

$0<\frac{1}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{5}{4}$.

3. Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

Il y a $\binom{30}{2}$ possibilités de former des binômes de délégués différents.

$$\binom{30}{2}=\frac{30\,!}{2\,!\,28\,!}=\frac{30\times 29}{2}=15\times 29=295\neq 870.$$

4. Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

Pour tout nombre réel x appartenant à $[1;+\infty[$, $f(x)=x(\ln x)^2$.
f est dérivable sur $[1;+\infty[$

$$f'(x)=(\ln x)^2+x(2\ln x)\times\frac{1}{x}=(\ln x)^2+2\ln x=\ln x(\ln x+2)$$

ln(1)=0 et si $1<x$ alors $0<\ln x$
$\ln x+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=e^{-2}$
$\ln(x)+2>0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x)>-2 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x)>\ln(e^{-2}) \quad\Leftrightarrow\quad x>e^{-2}$
Or $e^{-2}\simeq 0{,}135<1$ donc pour tout x appartenant à $]1;+\infty[$ on a $f'(x)>0$ et $f(1)=0$
et f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
$f(1)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln x)^2=+\infty$
f est continue et dérivable sur $[1;+\infty[$ à valeurs dans $[0;+\infty[$ et 1 appartient à $[0;+\infty[$,
le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

5. Affirmation 5 : VRAIE

Preuve

Pour calculer $\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$, on effectue une intégration par parties.

$u(x)=x \qquad u'(x)=1$

$v'(x)=e^{-x} \qquad v(x)=-e^{-x}$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = -e^{-1}+[-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1}-e^{-1}+1 = 1-2e^{-1} = 1-\frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}.$$