Exercice 1 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifier. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

Les quatre affirmations se placent dans la situation suivante :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points :
$A(2;1;-1)$ $B(-1;2;1)$ et $C(5;0;-3)$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x+5y-2z+3=0$

On note $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=-t+3 \\ y=t+2 \\ z=2t+1 \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

Affirmation 1 :
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).

Affirmation 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.

Affirmation 3 :
La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 :
Le plan médiateur du segment [BC], noté Q a pour équation cartésienne :
$3x-y-2z-7=0$

On rappelle que le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

CORRECTION

Affirmation 1 : FAUSSE

Preuve

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (OAC) si set seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (OAC), par exemples $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$.

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{OA}=1\times2+0\times1+2\times(-1)=2-2=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{OC}=1\times5+0\times0+2\times(-3)=5-6=-1\neq0$

donc $\vec{n}$ n'est pas un vecteur normal au plan (OAC).

Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}$ donc le point C appartient à la droite (AB).

$C(5;0;-3)$ $\begin{cases}5=-t+3\\0=t+2\\-3=2t+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\t=-2\\t=-2\end{cases}\Leftrightarrow\{t=-2$ donc C appartient à la droite $\mathscr{D}$.

$A(2;1;-1)$ $\begin{cases}2=-t+3\\0=t+2\\-1=2t+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=-2\\t=-1\end{cases}$ donc A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$ et les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas confondues et les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont sécantes en C.

Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

$\mathscr{P}:\ x+5y-2z+3=0$ $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$ $\vec{V}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ est un verteur directeur de $\mathscr{D}$.

$\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{N}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux.

$\vec{N}.\vec{V}=1\times(-1)+5\times1-2\times-1+5-4=0$.

$\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q, $I(2;1;-1)$ est le milieu de [BC].

$Q:\ 6x-2y-4z+k=0$ avec $k\in\mathbb{R}$, le point I appartient à Q donc :

$6\times2-2\times1-4\times(-1)+k=0 \Leftrightarrow 12-2+4+k=0 \Leftrightarrow k=-14$

$Q:\ 6x-2y-4z-14=0 \Leftrightarrow Q:\ 3x-y-2z-7=0$