Exercice 2 — 5 points

Une entreprise fabrique des objets en plastique en injectant dans un moule de la matière fondue à 210°C.
On cherche à modéliser le refroidissement du matériau à l'aide d'une fonction f donnant la température du matériau injecté en fonction du temps t.
Le temps est exprimé en seconde et la température est exprimée en degré Celsius.
On admet que la fonction f cherchée est solution d'une équation différentielle de la forme suivante où m est une constante réelle que l'on cherche à déterminer :
(E) : $y'+0{,}02y=m$.

Partie A

1. Justifier l'affichage suivant d'un logiciel de calcul formel :

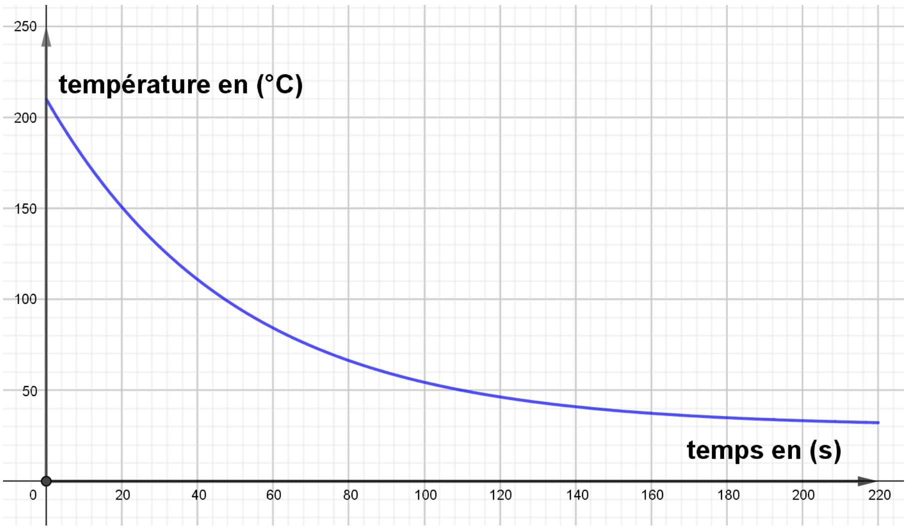
Entrée	RésoudreEquationDifférentielle(y'+0.02y=m)
sortie	→ y=k * exp(-0.02 * t)+50 * m

2. La température de l'atelier est de 30°C. On admet que la température $f(t)$ tend vers 30°C lorsque t tend vers $+\infty$.
Démontrer que $m=0{,}6$.

3. Déterminer l'expression de la fonction f cherchée en tenant compte de la fonction initiale $f(0)=20$.

Partie B

On admet ici que la température (exprimée en degré Celsius) du matériau injecté en fonction du temps (exprimé en seconde) est donnée par la fonction dont l'expression et une représentation graphique est donnée ci-dessous :
$f(t)=180\,e^{-0{,}02t}+30$.



1. L'objet peut-être démoulé lorsque la température devient inférieure à 50°C.

1.a. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du nombre T de secondes à attendre avant de démoulé l'objet.

1.b. Déterminer par le calcul la valeur exacte de ce temps T.

2. À l'aide d'une intégrale, calculer la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes.

CORRECTION

Partie A

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle du type $y'=a\,y+b$, avec a nombre réel non nul et b nombre réel, sont sont fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(t)=k\,e^{at}-\frac{b}{a}$ avec k constante réelle.

(E) : $y'+0{,}02\,y=m \Leftrightarrow y'=-0{,}02\,y+m$ donc $a=-0{,}02$ et $b=m$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f_k définies par $f_k(t)=k\,e^{-0{,}02\,t}-\left(\frac{m}{-0{,}02}\right) \Leftrightarrow$

$f_k(t)=k\,e^{-0{,}02\,t}+50\,m$ résultat donné par le logiciel de calcul formel.

2. $\lim\limits_{t\to+\infty}(-0{,}02\,t)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}f_k(t)=50\,m$

On admet que la température tend vers 30°C lorsque t tend vers $+\infty$.

On obtient $50\,m=30 \Leftrightarrow m=\frac{30}{50}=0{,}6$.

3. $f_k(t)=k\,e^{-0{,}02\,t}+30$ et $f_k(0)=210$ donc $f_k(0)=k\,e^0+30=210 \Leftrightarrow k=210-30=180$

et $f(t)=180\,e^{-0{,}02\,t}+30$

Partie B

1.a. On détermine graphiquement, l'abscisse T du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y=50$ on obtient $T=110$.

1.b. $f(t)=50 \Leftrightarrow 180\,e^{-0{,}02t}+30=50 \Leftrightarrow 180\,e^{-0{,}02t}=20 \Leftrightarrow e^{-0{,}02\,t}=\frac{20}{180}=\frac{1}{9} \Leftrightarrow$

$-0{,}02\,t=\ln\left(\frac{1}{9}\right)=-\ln(9) \Leftrightarrow t=\frac{\ln(9)}{0{,}02}=50\ln(t)$

donc $T=50\ln(9)\simeq 109{,}86$ à 10^{-2} près.

2. f est continue sur [0;100] donc la valeur moyenne de f sur [0;100] est : $\mu=\frac{1}{100}\int_0^{100}f(t)\,dt$.

$$\mu=\frac{1}{100}\int_0^{100}(180\,e^{-0{,}02t}+30)\,dt=0{,}01\left[180\left(\frac{e^{-0{,}02\,t}}{-0{,}02}\right)+30\,t\right]_0^{100}=0{,}01[-9000\,e^{-0{,}02\,t}+30\,t]_0^{100}$$

$\mu=0{,}01(-9000\,e^{-2}+3000+9000)=0{,}01(12000-9000\,e^{-2})$

$\mu=120-90\,e^{-2}\simeq 107{,}8$ à 10^{-1} près.

La température moyenne de la température sur les 100 premières secondes est : 107,8°C.