Exercice 3 5 points

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles.

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité de X.

2. Recopier et compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X.

k	0	1	2	3
P(X=k)				

Partie B

Voici les règles du jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais.

. On lance trois pièces équilibrées.
- Si les trois pièces sont tombées du côté « Face » la partie est gagnée.
- Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile »

. La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon ele est perdue.

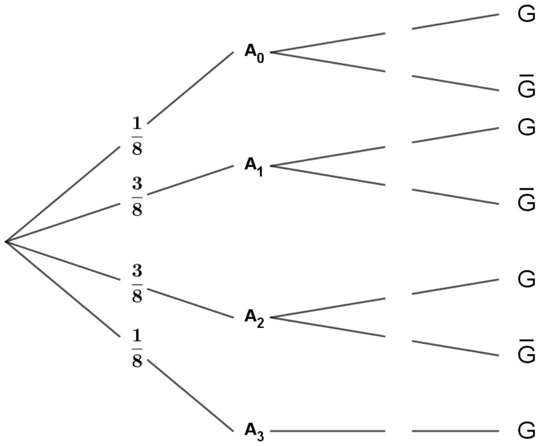
On considère les événements suivants :

. G : « la partie est gagnée ».
Et pour tout entier k compris entre et 3, les évènements :

. A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. Démontrer $P_{A_1}(G)=\dfrac{1}{4}$

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Démontrer que la probabilité p de gagner à ce jeu est : $p=\dfrac{27}{64}$

4. La partie a été gagnée. Quelle est la probabilité qu'exactement une pièce est tombée du côté « Face » à la première tentative ?

5. Combien de fois faut-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95.

CORRECTION

Partie A

1. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On lance une fois une pièce de monnaie bien équilibrée

Succès : S « la pièce est retombée sur « Face » » la probabilité de succès est $P(S)=p=\frac{1}{2}$.

Échec : $\bar{S}$ « la pièce est retombée sur « Pile » » la probabilité de l'échec est $P(\bar{S})=q=\frac{1}{2}$.

On effectue trois lancers de la pièce c'est à dire on réalise trois épreuves successives et indépendantes de Bernoulli.
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 3 épreuves. La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{1}{2}$.

2. L'univers image est $\{0; 1; 2; 3\}$.

$$P(X=0)=\binom{3}{0}\times\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=3\times\left(\frac{1}{8}\right)^3=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=\binom{3}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^0=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

On donne la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

k	0	1	2	3
P(X=k)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Partie B

1. A_1 est réalisé, on a donc obtenu au lancer des 3 pièces, une fois « Face » et deux fois « Pile ».
On doit relancer les 2 pièces retombées sur « Pile » alors pour gagner il faut que les deux pièces retombent sur « Face » donc la probabilité de gagner est : $\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

$P_{A_1}(G)=\frac{1}{4}$ et $P_{A_1}(\bar{G})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

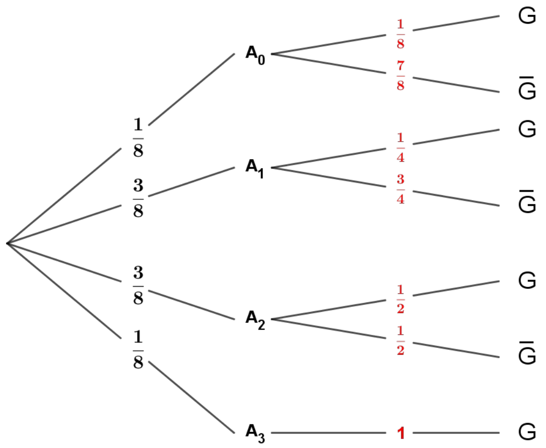
2. On démontre de même :

$P_{A_0}(G)=\frac{1}{8}$ et $P_{A_0}(G)=1-(\frac{1}{8})=\frac{7}{8}$

$P_{A_2}(G)=\frac{1}{2}$ et $P_{A_2}(\bar{G})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P_{A_3}(G)=1$

On complète l'arbre pondéré :



3. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :

$$P(G)=P(A_0)\times P_{A_0}(G)+P(A_1)\times P_{A_1}(G)+P(A_2)\times P_{A_2}(G)+P(A_3)\times P_{A_3}(G)$$

$$P(G)=\left(\frac{1}{8}\right)\times\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)\times 1=\frac{1}{64}+\frac{3}{32}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}=\frac{1+6+12+8}{64}=\frac{27}{64}$$

4. $P_G(A_1)=\dfrac{P(G\cap A_1)}{P(G)}=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{4}:\dfrac{27}{64}=\dfrac{3}{32}\times\dfrac{64}{27}=\dfrac{2}{9}$

5 . n est un entier naturel non nul.

Si on joue n parties de ce jeu la probabilité de perdre les n parties est $\left(1-\frac{27}{64}\right)^n=\left(\frac{37}{64}\right)^n$.

La probabilité de gagner au moins une partie est : $1-\left(\frac{37}{64}\right)^n$.

$$1-\left(\frac{37}{64}\right)^n>0,95 \quad\Leftrightarrow\quad 1-0,95>\left(\frac{37}{64}\right)^n \quad\Leftrightarrow\quad 0,05>\left(\frac{37}{64}\right)^n$$

$\ln$ est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$$\Leftrightarrow\quad \ln(0,05)>\ln\left(\frac{37}{64}\right)^n \quad\Leftrightarrow\quad \ln(0,05)>n\times\ln\left(\frac{37}{64}\right)$$

$0<\frac{37}{64}<1$ donc $\ln\left(\frac{37}{64}\right)<0$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)}<n$$

En utilisant la calculatrice : $\dfrac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)}\simeq 5,47$

n est un entier naturel :

$\Leftrightarrow\quad n\leqslant 6$

Il faut jouer au moins 6 parties pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95.