Exercice 4 *6 points*

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\dfrac{4}{5-u_n}$.

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suite(n) qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur u_n .

```
def suite(n):
  u= . . .
  for i in range(n):
    . . . .
  return n
```

2. L'exécution de suite(2) envoie 1,3333333333333333.
Effectuer un calcul pour vérifier cet affichage.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n) .

```
≥ suite(2)
1.3333333333333333
≥ suite(5)
1.0058479532163742
≥ suite(10
1.0000057220349845
≥ suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty;5[$ par : $f(x)=\dfrac{4}{5-x}$.

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty;5[$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$.

3.a. Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty;5[$. Prouver l'équivalence suivante :
$f(x)=x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-5x+4=0$.

3.b. Résoudre $f(x)=x$ dans l'intervalle $]-\infty;5[$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme premier terme $u_0=4$ au lieu de $u_0=3$?

CORRECTION

Partie A

1. On complète la fonction Python suite(n).

```
def suite(n):
  u= 3
  for i in range(n):
    u=4/(5-u)
  return n
```

2. L'instruction for i in range(2) exécute le programme pour les deux valeurs i=0 et i=1.

Pour i=0 on obtient $u_1=\frac{4}{5-3}=\frac{4}{2}=2$

Pour i=1 on obtient $u_2=\frac{4}{5-2}=\frac{4}{3}$ dont une valeur approchée à 10^{-16} est 1,3333333333333333.

3. On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 1.

Partie B

1. f est dérivable sur $]-\infty;5]$ et $f'(x)=\frac{0\times(5-x)-4\times(-1)}{(5-x)^2}=\frac{4}{(5-x)^2}>0$

f est croissante sur $]-\infty;5[$.

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 4$.

Initialisation

$u_0=3$ et $u_1=2$ donc $1\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant 4$

La propriété est vérifiée pour $n=0$

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 4$ et on doit démontrer que $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$.

Or f est croissante sur $]-\infty;5[$, donc :

Si $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 4$ alors $f(1)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)\leqslant f(4)$

et $f(1)=\frac{4}{5-1}=\frac{4}{4}=1$, $f(u_{n+1})=u_{n+2}$, $f(u_n)=u_{n+1}$, $f(4)=\frac{4}{5-4}=\frac{4}{1}=4$

donc $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$

Conclusion

Le principe de récurrence, nous permet d'affirmer, que pour entier naturel n, on a : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 4$.

3.a. $x\in]-\infty;5[$

$$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{4}{5-x}=x \Leftrightarrow 4=x(5-x) \Leftrightarrow 4=5x-x^2 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0$$

3.b. $\Delta=(-5)^2-4\times1\times4=25-16=9=3^2$

$x_1=\frac{5-3}{2}=1$ et $x_2=\frac{5+3}{2}=4$

$1\in]-\infty;5[$ et $4\in]-\infty;5[$ donc $\mathcal{S}=\{1;4\}$.

4. Pour tout entier naturel n, on a : d'une part $u_{n+1}\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante et d'autre part $1\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.

Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente.
Et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ avec $f(\ell) = \ell$ donc $\ell = 1$ ou 4.
Or la suite (u_n) est convergente et $u_0 = 3$ donc pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$ et $\ell \neq 4$.
Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

5. Si on pose $u_0 = 4$ alors $u_1 = \frac{4}{5-4} = \frac{4}{1} = 4$ et pour tout entier naturel n si $u_n = 4$ alors $u_{n+1} = 4$.
Donc (u_n) est la suite constante égale à 4.