## Exercice 3 — 6 points

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$.

**1.a.** Donner les valeurs arrondies au centième de $u_1$ et $u_2$.

**1.b.** On considère la fonction mystere définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif a, log(a) renvoie la valeur du logarithme néperien de a.

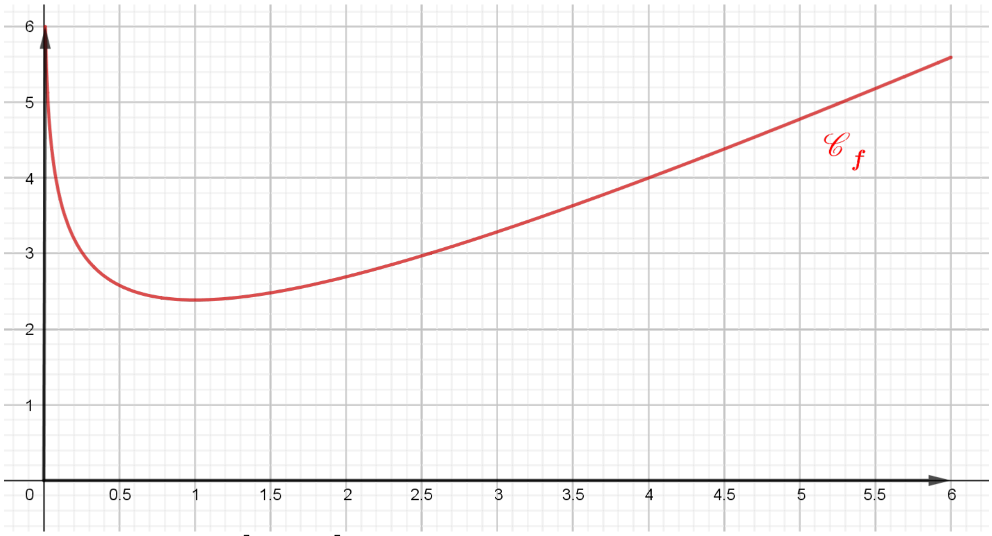
```
def mystere(k):
  u=8
  S=0
  for i in range(k):
    S=S+u
    u=u-log(u/4)
  return S
```

L'exécution de mystere(10) renvoie 58,44045206721732 . Que représente ce résultat.

**1.c.** Modifier la fonction précédente afin qu'elle retourne la moyenne des k premiers termes de la suite $(u_n)$.

**2.** On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$.

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6.




Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

*On précisera la valeur exacte du minimum de $f$ sur $]0;+\infty[$, les limites ne sont demandées.*

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**3.a.** Démontrer par récurrence, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

**3.b.** En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers une limite réelle.

On note $\ell$ la valeur de cette limite.

**3.c.** Résoudre l'équation $f(x) = x$.

**3.d.** En déduire la valeur de $\ell$.

## CORRECTION

**1.a.** $u_1=8-\ln(2)\simeq 7{,}3$ arrondi à $10^{-1}$

$u_2=8-\ln(2)-\ln\left(2-\dfrac{\ln(2)}{4}\right)\simeq 6{,}7$ arrondi à $10^{-1}$.

**1.b.** mystere(10) renvoie : $u_0+u_1+\ldots+u_9=\sum_{i=0}^{9} u_i$ .

on obtient la somme des 10 premiers termes de la suite ($u_n$).

**1.c.** Pour renvoyer la moyenne des $k$ premiers termes de la suite ($u_n$), il suffit de remplacer la dernière instruction : return S par return S/k .

Remarque : $k$ est un entier naturel non nul.

**2.** x appartient à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ , $f(x)=x-\ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$ .

remarque : $f(x)=x-\ln(x)+\ln(4)$ .

$f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ , $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$ .

Le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ est le signe de (x-1).

Tableau de variation de $f$.

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | | 0 | | |
| f(x) | | ↘ | f(1) | ↗ | |

$$f(1)=1-\ln\left(\frac{1}{4}\right)=1+\ln(4)\simeq 2{,}39 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

**3.a.** On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ .

Initialisation

$u_0\simeq 7{,}3$ et $u_1\simeq 6{,}7$ donc $1\leqslant u_1\leqslant u_0$ et la propriété est vérifiée pour $n=0$ .

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel $n$, on suppose que : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ et on doit démontrer que $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$ .

$f$ est une fonction croissante sur $[1\,;+\infty[$ .

Si $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ alors $f(1)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)$ .

Or $f(1)=1+\ln(4)\geqslant 1$ et $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(u_n)=u_{n+1}$ donc $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$ .

Conclusion

Le principe de récurrence, nous permet d'affirmer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ .

**3.b.** Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1}\leqslant u_n$ donc la suite $(u_n)$ est décroissante et $1\leqslant u_n$ donc la la $(u_n)$ est minorée par 1.

Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite $(u_n)$ est convergente.

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.

**3.c.** x appartient à $]0\,;+\infty[$ .

$f(x)=x \Leftrightarrow x-\ln\left(\dfrac{x}{4}\right)=x \Leftrightarrow 0=\ln\left(\dfrac{x}{4}\right) \Leftrightarrow \dfrac{x}{4}=1 \Leftrightarrow x=4$ $\qquad \mathscr{S}=\{4\}$.

**3.d.** Pour tout entier naturel $n$, $f(u_n)=u_{n+1}$ .

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$.

$f$ est une fonction continue sur $]0\,;+\infty[$ donc $f(\ell)=\ell$ et $\ell$ est une solution de l'équation $f(x)=x$ donc $\ell=4$.