Exercice 4 — 5 points

Une commune décide de remplacer le traditionnel feu d'artifice du 14 juillet par un spectacle de drones lumineux.
Pour le pilotage des drones l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ dont l'unité est la centaine de mètres.
La position de chaque drone est modélisée par un point et chaque drone est envoyé d'un point de départ D de coordonnées $(2;5;1)$.
On souhaite former avec les drones des figures en les positionnant dans un même plan $\mathscr{P}$.
Trois drones sont positionnés aux points : $A(-1;-1;17)$; $B(4;-2;4)$ et $C(1;-3;7)$

1. Justifier que les points A ; B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite , on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC) et on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

2.a. Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).
2.b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $2x-3y+z-18=0$.

3. Le pilote des drones décide d'envoyer un quatrième drone en prenant pour trajectoire la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par $d:\begin{cases}x=3t+2\\y=t+5\\z=4t+1\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

3.a. Déterminer un vecteur directeur de la droite d.
3.b. Afin que ce nouveau drone soit également placé dans le plan $\mathscr{P}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point E, intersection de la droite d avec le plan $\mathscr{P}$.

4. Le pilote des drones décide d'envoyer un cinquième drone le long de la droite Δ qui passe par le point D et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Ce cinquième drone est placé lui aussi dans le plan $\mathscr{P}$, soit à l'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$.
On admet que le point $F(6;-1;3)$ correspond à cet emplacement.
Démontrer que la distance entre le point de départ D et le plan $\mathscr{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. L'organisatrice du spectacle demande au pilote d'envoyer un nouveau drone dans le plan $\mathscr{P}$ (peu importe sa position dans le plan), toujours à partir du point D.
Sachant qu'il reste 40 secondes avant le début du spectacle et que le drone vole en trajectoire rectiligne à $18{,}6\ \text{m.s}^{-1}$, le nouveau drone peut-il arriver à temps ?

CORRECTION

1. $A(-1;-1;17)$ $B(4;-2;4)$ $C(1;-3;7)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\\-13\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\\-10\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}5=2\lambda\\-1=-2\lambda\\-13=-10\lambda\end{cases}$ il n'existe pas de valeur de λ pour laquelle $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A ; B et C ne sont pas alignés.

2.a. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$ par exemples les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\\-13\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\\-10\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2\times5+(-3)\times(-1)+1\times(-13)=10+3-13=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2\times2+(-3)\times(-2)+1\times(-10)=4+6-10=0$

$\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

2.b. $A(-1;-1;17)$ $M(x;y;z)$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z-17\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

M appartient au plan $\mathscr{P}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ $\Leftrightarrow$ $2\times(x+1)-3\times(y+1)+1\times(z-17)=0$

$\Leftrightarrow$ $2x+2-3y-3+z-17=0$ $\Leftrightarrow$ $2x-3y+z-18=0$

3.a. Les coordonnées d'un vecteur directeur de d sont les coefficients du paramètre t dans la représentation paramétrique. $\vec{V}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

3.b. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection E de la droite d et du plan $\mathscr{P}$, on résout le système : $\begin{cases}2x-3y+z-18=0\\x=3t+2\\y=t+5\\z=4t+1\end{cases}$ on obtient : $2\times(3t+2)-3\times(t+5)+(4t+1)-18=0$

$\Leftrightarrow$ $6t+4-3t-15+4t+1-18=0$ $\Leftrightarrow$ $7t-28=0$ $\Leftrightarrow$ $t=4$

$x=3\times4+2=14$ $y=4+5=9$ $z=4\times4+1=17$ $E(14;9;17)$.

4. $F(6;-1;3)$ $D(2;5;1)$ la distance du point D au plan $\mathscr{P}$ estla longueur DF.

$DF^2=(6-2)^2+(-1-5)^2+(3-1)^2=4^2+6^2+2^2=16+36+4=56$

$DF=\sqrt{56}=\sqrt{4\times14}=2\sqrt{14}$ en centaines de mètres.

5. En 40 secondes le sixième drone parcourt : $18{,}6\times40=744$ mètres.

Or la distance DF est la plus courte distance du point D à un point quelconque de $\mathscr{P}$.

$DF=2\sqrt{14}\simeq7{,}48$ centaines de mètres donc 748 mètres.

$748>744$ donc le nouveau drone n'arrivera à temps au plan $\mathscr{P}$.