

Exercice 2

6 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + x$.

Affirmation A :

La fonction f admet pour tableau de variations, le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$+\infty$

Affirmation B :

L'équation $f(x) = -2$ admet 2 solutions dans $\mathbb{R}$.

2. **Affirmation C :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

3. On considère la fonction k définie et continue sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = 1 + 2e^{-x^2+1}$.

Affirmation D :

Il existe une primitive de la fonction k décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. On considère l'équation différentielle

$$(E): 3y' + y = 1$$

Affirmation E :

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4e^{-\frac{1}{3}x} + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E) avec $g(0) = 5$.

5. **Affirmation F :**

Une intégration par parties permet d'obtenir : $\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}$.

CORRECTION

Affirmation A : VRAIE

Preuve

$$f(x) = e^x + x \quad f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \quad f'(x) = e^x + 1 > 0$$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On obtient bien pour tableau de variations le tableau donné.

Affirmation B : FAUSSE

Preuve

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que, pour tout nombre réel y il existe un unique antécédent x c'est à dire un unique x tel $f(x) = y$ donc l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Affirmation C : VRAIE

Preuve

$$\frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = \frac{1}{3} \times \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

Affirmation D : FAUSSE

Preuve

$$\text{Pour tout nombre réel } x : k(x) = 1 + 2e^{-x^2+1}.$$

Toute primitive de k sur $\mathbb{R}$ admet pour fonction dérivée k .

Or pour tout nombre réel x , $e^{-x^2+1} > 0$ donc $k(x) > 0$ et toute primitive de k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Affirmation E : VRAIE

Preuve

$$\text{Pour tout réel } x, \quad g(x) = 4 \times e^{-\frac{1}{3}x} + 1$$

$$g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g'(x) = 4 \times \left(-\frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} \right) = -\frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}x}.$$

$$\text{donc } 3g'(x) + g(x) = -4e^{-\frac{1}{3}x} + 4e^{-\frac{1}{3}x} + 1 = 1.$$

g est une solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 4e^0 + 1 = 5$.

Affirmation F : VRAIE

Preuve

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad u(x) = 1 \quad u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = e^{-x} \quad v(x) = -e^{-x}$$

u et v sont dérivables sur $[0;1]$ et leurs dérivées sont continues sur $[0;1]$.

En utilisant la formule d'intégration par parties.

$$I = \int_0^1 x e^{-x} dx = [x \times (-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-x e^{-x}) dx$$

$$I = -1 \times e^{-1} + 0 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}$$