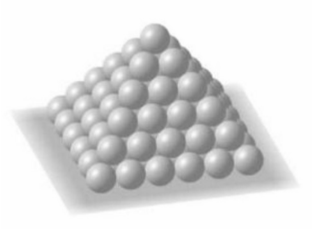
Exercice 3 — 4 points

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres.



- Le 1^{er} étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le $2^{ème}$ étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le $3^{ème}$ étage possède 9 boules ;
- . . . .
- le $n^{ème}$ étage possède n^2 boules.

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le $n^{ème}$ étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi $u_n=n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.

2. On considère la suite (S_n), définie pour tout entier $n\geqslant 1$ par :
$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

2.a. Calculer S_5, interpréter ce résultat.

2.b. On considère la fonction pyramide ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python. Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction pyramide(n) renvoie le nombre de boules composant une pyramide à n étages.

```
def pyramide(n):
  S=0
  for i in range(1,n+1):
    S= . . . .
  return . . .
```

2.c. Vérifier pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

2.d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il dispose de 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible ?

CORRECTION

1. Pour une pyramide de 4 étages, on a : $1+4+9+16=30$ boules

2.a. $S_5=1+4+9+16+25=30+25=55$.

Il y a 55 boules dans une pyramide de 5 étages.

2.b.

```
def pyramide(n):
  S=0
  for i in range(1,n+1):
    S= S+i**2
  return S
```

2.c. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$

$=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$.

$\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

donc $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

2.d. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrene que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a :

$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation

Pour $n=1$ $S_1=u_1=1^2=1$ $\frac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}=\frac{1\times2\times3}{6}=1$.

Donc la propriété est vérifiée pour $n=1$;

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que :

$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et on doit démontrer que : $S_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$.

Or $S_{n+1}=S_n+(n+1)^2$ donc la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, en utilisant le résultat de la question précédente.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$S_n=1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. On remarque :

$S_5=55$; $S_6=55+36=91$; $S_7=91+49=140$ et $S_8=140+64=204>200$.

Le marchand utilise 140 oranges, pour construire la plus grande pyramide possible : pyramide de 7 étages avec les 200 oranges disponibles.