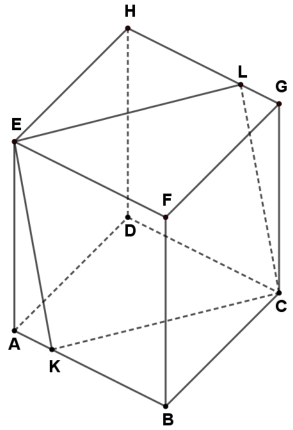
Exercice 4 *5 points*

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A;\vec{AB};\vec{AD};\vec{AE})$.
Pour tout réel m appartenant à l'intervalle [0;1] on considère les points $K(m;0;0)$ et $L(1-m;1;1)$.



1. Donner les coordonnées des points E et C.

2. Dans cette question, $m=0$. Ainsi , le point $L(1;1;1)$ est confondu avec le point G, le point $K(0;0;0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

2.a. Justifier que le vecteur $\vec{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA).

2.b. Déterminer une équation cartésienne du plan (GEA).

On s'intéresse désormais à la nature de CKEL en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle [0;1].
3.a. Démontrer que CKEL est un parallélogramme.
3.b. Justifier que $\vec{KE}.\vec{KC}=m(m-1)$.
3.c. Démontrer que CKEL est un rectangle si, et seulement si, $m=0$ ou $m=1$.

4. Dans cette question, $m=\frac{1}{2}$. Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};1;1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};0;0\right)$.
4.a. Démontrer que le parallélogramme est alors un losange.
4.b. À l'aide de la question **3.b.** déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{CKE}$

CORRECTION

1. $E(0;0;1)$ $\quad C(1;1;0)$

2.a. $G(1;1;1)$ $\quad D(0;1;0)$ $\quad B(1;0;0)$ $\quad A(0;0;0)$

$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{EA}=1\times0+(-1)\times0+0\times(-1)=0$

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{EG}=1\times(-1)+(-1)\times(-1)+0\times0=-1+1=0$

Le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GEA) donc le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est un vecteur normal au plan (GEA).

2.b. $M(x;y;z)$ $\quad A(0;0;0)$ $\quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

(GEA) est le plan passant par A et de vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{DB}$ donc le point M appartient au plan (GEA) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DB}=0$ $\Leftrightarrow$ $x\times1+y\times(-1)+z\times0=0$ $\Leftrightarrow$ $x-y=0$

3.a. $C(1;1;0)$ $\quad K(m;0;0)$ $\quad E(0;0;1)$ $\quad L(1-m;1;1)$ $\quad \overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}m-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{LE}\begin{pmatrix}m-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{LE}$ et le quadrilatère CKEL est un parallélogramme.

3.b. $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-m\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-m\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{KE}.\overrightarrow{KC}=(-m)\times(1-m)+0\times(-1)+1\times0=-m(1-m)=m(m-1)$

3.c. Le parallélogramme CKEL est un rectangle si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{KE}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont orthogonaux c'est à dire : $\overrightarrow{KE}.\overrightarrow{KC}=0$ $\Leftrightarrow$ $m(1-m)=0$ $\Leftrightarrow$ $(m=0 \text{ ou } m=1)$.

4. $m=\frac{1}{2}$ $\quad L\left(\frac{1}{2};1;1\right)$ et $K\left(\frac{1}{2};0;0\right)$.

4.a. $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\0\end{pmatrix}$

$KE^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2=\frac{1}{4}+0+1=\frac{5}{4}$ $\qquad KC^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2+0^2=\frac{1}{4}+1+0=\frac{5}{4}$

$KE^2=KC^2=\frac{5}{4}$ $\Leftrightarrow$ $KE=KC=\frac{\sqrt{5}}{2}$

donc le parallélogramme CKEL est un losange.

4.b. $\overrightarrow{KE}.\overrightarrow{KC}=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}=KE\times KC\times\cos(\widehat{CKE})$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\cos(\widehat{CKE})$

$\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\times\cos(\widehat{CKE})$ $\Leftrightarrow$ $\cos(\widehat{CKE})=-\frac{1}{5}=-0{,}2$

En utilisant la calculatrice : $\widehat{CKE}=102^\circ$ au degré près.