Exercice 1

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes

Partie 1

On considère l'équation différentielle
$(\mathrm{E}): \quad y' - y = \mathrm{e}^{-x}$

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{u}(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.
Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle
$(\mathrm{E}'): \quad y' + y = 0$
Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $\mathrm{g}(0) = 2$.

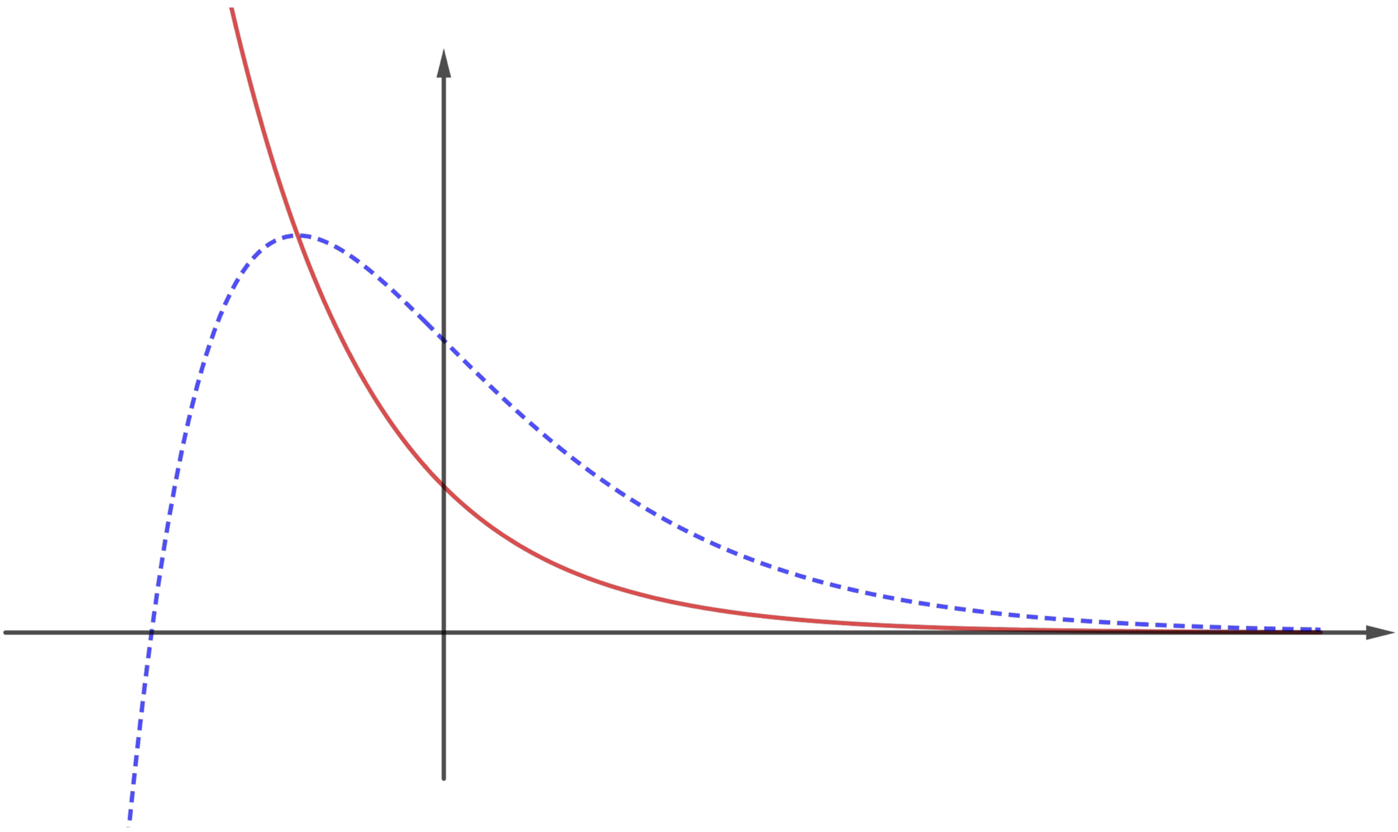
Partie 2

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.
On considère la fonction f_{k} définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{f}_{\mathrm{k}}(x) = (x + \mathrm{k})\mathrm{e}^{-x}$.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_{\mathrm{k}}$ la courbe représentative de la fonction f_{k} dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h.
On a représenté sur un graphique en annexe les courbes $\mathscr{C}_{\mathrm{k}}$ et $\mathscr{C}$ sans indiquer les unités sur les axes et le nom des courbes.

1. Sur le graphique en annexe à rendre avec la copie, l'une des courbes est en traits pointillés, l'autre en trait plein. Laquelle est la courbe $\mathscr{C}$?

2. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k et placer sur l'annexe à rendre avec la copie l'unité sur chacun des axes du graphique.

ANNEXE à rendre avec la copie



CORRECTION

Partie 1

1. $(\mathrm{e}^{-x})'=-\mathrm{e}^{-x}$ donc $\mathrm{u}'(x)=1\times\mathrm{e}^{-x}+x\times(-\mathrm{e}^{-x})=\mathrm{e}^{-x}-x\,\mathrm{e}^{-x}$.
Pour tout nombre réel x $\mathrm{u}'(x)+\mathrm{u}(x)=\mathrm{e}^{-x}-x\,\mathrm{e}^{-x}+x\,\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}$ donc u est une solution particulière de l'équation (E).

2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire , homogène : $y'+\mathrm{a}\,y=0$ $(\mathrm{a}\neq 0)$ est l'ensemble des fonctions f_λ (λ est un nombre réel) telle que, pour tout nombre réel x :
$\mathrm{f}_\lambda(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{a}x}$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E') est l'ensemble des fonctions f_λ (λ nombre réel) telle que pour tout réel x $\mathrm{f}_\lambda(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-x}$, car $\mathrm{a}=1$.

3. u étant une solution particulière de (E) donc l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions g_λ (λ nombre réel) telle que, pour tout nombre réel x :
$\mathrm{g}_\lambda(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}=(x+\lambda)\mathrm{e}^{-x}$.

4. $\mathrm{g}_\lambda(0)=(0+\lambda)\mathrm{e}^{0}=\lambda\times 1=\lambda$
$\mathrm{g}_\lambda(0)=2 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=2$
L'unique solution g de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $\mathrm{g}(x)=2$ est la fonction g_2 c'est à dire pour tout entier nombre réel x : $\mathrm{g}(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie 2

1. Pour tout nombre réel x , $\mathrm{h}(x)=\mathrm{e}^{-x}$ donc $\mathrm{h}'(x)=-\mathrm{e}^{-x}<0$;
Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ est la courbe en trait plein sur le graphique.

2. $\mathrm{h}(0)=\mathrm{e}^{0}=1$ donc le point A d'intersection de $\mathscr{C}$ et l'axe des ordonnées à pour coordonnées (0;1).
L'unité sur l'axe des ordonnées est $\mathrm{OA}=1$.
D est le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_\mathrm{k}$ et de l'axe des ordonnées.
On trace le cercle de centre A et passant par O (de rayon 1), ce cercle passe par D et $\mathrm{OD}=2$.
Donc $\mathrm{D}(0;2)$ et $\mathrm{g}_\mathrm{k}(0)=2 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{k}=2$.
La courbe tracée en traits pointillés est la courbe $\mathscr{C}_2$.
C est le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_2$.
$\mathrm{h}(x)=\mathrm{g}_2(x) \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}^{-x}=(x+2)\mathrm{e}^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad 0=(x+1)\mathrm{e}^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad x=-1$ (car $\mathrm{e}^{-x}\neq 0$).
L'abscisse du point C est égale à -1.
On trace le cercle de centre O passant par B (et A), le deuxième point d'intersection de ce cercle et l'axe des abscisses est $\mathrm{E}(1;0)$.
L'unité sur l'axe des abscisses est $\mathrm{OE}=1$.

ANNEXE à rendre avec la copie