Exercice 2

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes

Partie 1

Pour un entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur [0;1] par :
$f_n(x)=x^n e^x$.

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx.$$

1.a. On désigne par F_1 la fonction définie sur [0;1] par : $F_1(x)=(x-1)e^x$.

Vérifier que F_1 est une primitive de f_1.

1.b. Calculer I_1

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout entier supérieur ou égal à 1 :
$I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

3. Calculer I_2.

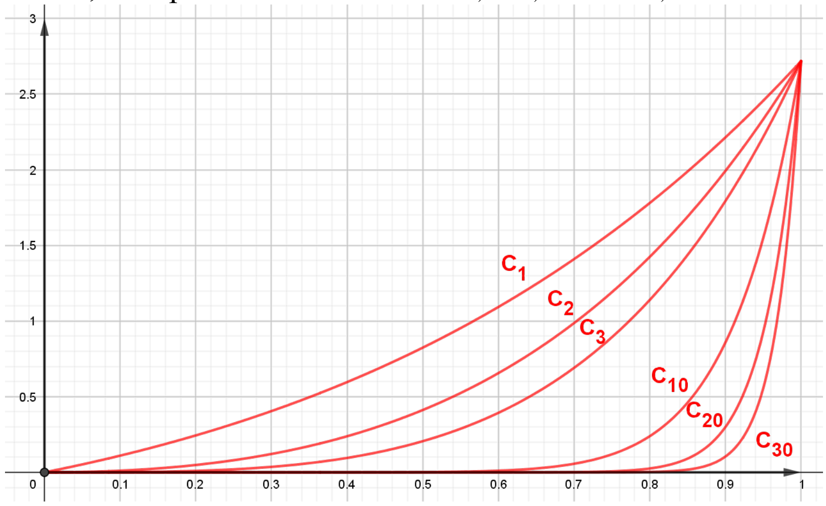
4. On considère la fonction mystère écrite en langage Python :

```
from  math import e # la constante d'euler e
def mystere(n):
  a=1
  L=[a]
  for i range(1,n):
    a=e-(i+1)*a
    L.append(a)
  return L
```

À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel mystère(5).

Partie 2

1. Sur le graphique ci-dessous, on représente les courbes C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20} et C_{30}.



1.a. Donner l'interprétation graphique de I_n.

1.b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant e \int_0^1 x^n \, dx$.

3. En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

CORRECTION

Partie 1

1.a. Pour tout nombre réel x appartenant à [0;1], $F_1(x)=(x-1)e^x$.

F_1 est dérivable sur [0;1]

$(e^x)'=e^x$ $(x-1)'=1$

$F_1'(x)=1\times e^x+(x-1)e^x=xe^x=f_1(x)$

F_1 est une primitive de f_1 sur [0;1].

1.b. $I_1=\int_0^1 f_1(x)dx=[F_1(x)]_0^1=F_1(1)-F_1(0)=(1-1)e^1-(0-1)e^0=0+1=1$ $I_1=1$.

2. Pour tout entier supérieur ou égal à 1 : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx$

$u(x)=x^{n+1}$ $u'(x)=(n+1)x^n$

$v'(x)=e^x$ $v(x)=e^x$

On utilise une intégration par parties.

Si les fonctions u et v sont dérivables sur [a;b] et si u' et v' sont continues sur [a;b] (a et b sont des nombres réels tels que $a\leqslant b$) alors :

$$\int_a^b u(x)\times v'(x)dx=[u(x)\times v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)\times v(x)dx$$

donc $\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=[x^{n+1}e^x]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n e^x dx \Leftrightarrow I_{n+1}=e^1-(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$

$\Leftrightarrow$ $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

3. Pour n=1, $I_2=e-2\times 1=e-2$

4. L'instruction for i range(1,5) donne successivement les valeurs à i : 1, 2, 3 et 4.

La valeur initiale de a est $1=I_1$.

Pour $i=1$, $a=e-2I_1=I_2$, L.append(a) $L=[I_1,I_2]$

Pour $i=2$, $a=I_3$, $L[I_1,I_2,I_3]$

. . .

L'appel de mystere(5) renvoie $L=[I_1,I_2,I_3,I_4,I_5]$

Partie 2

1.a. Le repère est orthogonal mais non orthonormé. L'unité d'aire est l'aire d'un rectangle ayant pour longueur l'unité de longueur de l'axe des abscisses et pour largeur l' unité de longueur de l'axe des ordonnées.

Pour tout entier supérieur ou égal à 1 et tout nombre réel x de l'intervalle [0;1] : $x^n e^x=f_n(x)\geqslant 0$ et f_n est continue sur [0;1] donc I_n est l'aire (en unité d'aire) de la partie comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C_n et les droites d'équations : x=0 et x=1.

1.b. On remarque que les courbes C_n sont très voisines de l'axe des abscisses sur l'intervalle [0;1], pour les valeurs très grandes de n. On conjecture : $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.

2. La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $0\leqslant x\leqslant 1$ alors $e^0\leqslant e^x\leqslant e^1$ $\Leftrightarrow$ $1\leqslant e^x\leqslant e$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et pour tout réel x de [0;1], on a : $0\leqslant x^n$.

On obtient $0\leqslant f_n(x)\leqslant e x^n$.

Positivité de l'intégrale.

$$\int_0^1 0\,dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx \leqslant \int_0^1 e\,x^n\,dx$$

$$0 \leqslant I_n \leqslant e\int_0^1 x^n\,dx$$

3. $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

donc $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$.

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$.