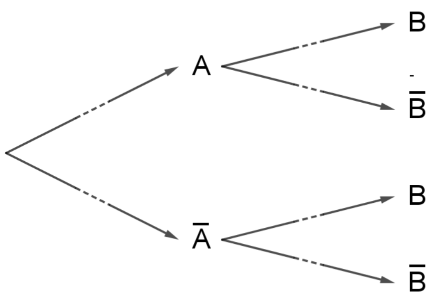
## Exercice 3

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

**Partie I**

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.
Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point, une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte 0 point.
On considère que :
. Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à Q1.
. Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.
On prend un candidat au hasard et on note :
. A l'événement : « le candidat répond correctement à la question Q1 »
. B l'événement : « le candidat répond correctementà la question Q2 ».
On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les événement contraires de A et B.

**1.** Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.




**2.** Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.

**3.** Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :
. $X_1$ la variable aléatoire qui, à un candidat associe sa note à la question Q1 ;
. $X_2$ la variable aléatoire qui, à un candidat associe sa note à la question Q2 ;
. $X$ la variable aléatoire qui, à un candidat associe sa note à l'exercice, c'est à dire $X=X_1+X_2$ .

**4.** Déterminer l'espérance de $X_1$ et de $X_2$ . En déduire l'espérance de X. Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

**5.** On souhaite déterminer la variance de X.
**5.a.** Déterminer $P(X=0)$ et $P(X=2)$ . En déduire $P(X=1)$ .
**5.b.** Montrer que la variance de X vaut 0,57.
**5.c.** A-t-on $V(X)=V(X_1)+V(X_2)$ ? Est-ce surprenant ?

**Partie II**

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.
Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.

Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

On note $Y$ la variable aléatoire qui a un candidat associe sa note au deuxième exercice, c'est à dire le nombre de bonnes réponses.

**1.** Justifier que $Y$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

**2.** Donner la valeur exacte de $P(X=8)$.

**3.** Donner l'espérance et la variance de $Y$.

**Partie III**

On suppose que les deux variables aléatoires sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un associe sa note totale à l'examen : $Z=X+Y$ .

**1.** Calculer l'espérance et la variance de $Z$ .

**2.** Soit $n$ un nombre entier strictement positif.
Pour $i$ entier variant de $1$ à $n$, on note $Z_i$ la variable aléatoire qui, à un échantillon de $n$ élèves, associe la note de l'élève numéro $i$ à l'examen.
On admet que les variables aléatoires $Z_{,}$ $Z_2, \ldots Z_n$ sont identiques à $Z$ et sont indépendantes.
On note $M_n$ la variable aléatoire qui, a un échantillon de $n$ élèves associe la moyenne de leurs $n$ notes, c'est à dire $M_n=\frac{Z_1+Z_2+\ldots Z_n}{n}$ .

**2.a.** Quelle est l'espérance de $M_n$ ?.

**2.b.** Quelles sont les valeurs de $n$ telles que l'écart type de $M_n$ soit inférieur ou égal à $0{,}5$ ?

**2.c.** Pour les valeurs trouvées en **2.b.**, montrer que la probabilité que $6{,}3\leqslant M_n\leqslant 8{,}3$ est supérieure ou égale à $0{,}75$.

## CORRECTION

### Partie I

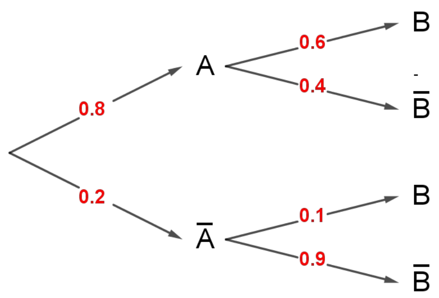
**1.** L'énoncé précise :

. $P(A)=0,8$ donc $P(\bar{A})=1-0,8=0,2$

. $P_A(B)=0,6$ donc $P_A(\bar{B})=1-0,6=0,4$

. $P_{\bar{A}}(B)=0,1$ donc $P_{\bar{A}}(\bar{B})=1-0,1=0,9$

. On obtient l'arbre pondéré suivant :




**2.** $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=0,6\times 0,8=0,48$

**3.** Formule des probabilités totales :

$P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)$

$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B)=0,2\times 0,1=0,02$

$P(B)=0,48+0,02=0,5$

**4.** L'univers image de $X_1$ est $\{0;1\}$.

$P(X_1=0)=P(\bar{A})=0,2$ et $P(X_1=1)=P(A)=0,8$

$E(X_1)=0\times 0,2+1\times 0,8=0,8$

. L'univers image de $X_2$ est $\{0;1\}$

$P(X_2=1)=P(B)=0,5$ et $P(X_2=0)=P(\bar{B})=0,5$

$E(X_2)=0\times 0,5+1\times 0,5=0,5$

. $E(X)=E(X_1)+E(X_2)=0,8+0,5=1,3$

La moyenne des notes des candidats au premier exercice sera voisine de 0,9.

**5.a.** L'univers image de $X$ est $\{0;1;2\}$

$P(X=0)=P(\bar{A}\cap\bar{B})=0,2\times 0,9=0,18$

$P(X=2)=P(A\cap B)=0,48$

$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=1-0,48-0,18=0,34$

On donne la loi de probabilité de $X$ sous la forme d'un tableau.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 0.18 | 0.34 | 0.48 |

**5.b.** $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$E(X^2)=0,18\times 0^2+0,34\times 1^2+0,48\times 2^2=0,34+1,92=2,26$

$(E(X))^2=1,3^2=1,69$

$V(X)=2,26-1,69=0,57$

**5.c.** $V(X_1)=E(X_1^2)-(E(X_1))^2$

$E(X_1^2)=0,2\times 0^2+0,8\times 1^2=0,8$

$(E(X_1))^2=0,8^2=0,64$

$V(X_1)=0,8-0,64=0,16$

$V(X_2)=E(X_2^2)-(E(X_2))^2$
$E(X_2^2)=0{,}5\times0^2+0{,}5\times1^2=0{,}5$
$(E(X_2))^2=0{,}5^2=0{,}25$
$V(X_2)=0{,}5-0{,}25=0{,}25$
$V(X_1)+V(X_2)=0{,}16+0{,}25=0{,}41\neq0{,}57=V(X)$

Le résultat n'est pas surprenant sachant que les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ ne sont pas indépendantes.

**Partie II**

**1.** On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On choisit au hasard un candidat et une des huit questions du deuxième exercice.
Succès $S$ : « le candidat répond correctement à la question »
probabilité de succès : $P(S)=\frac{3}{4}=0{,}75=p$
Échec $\bar{S}$ : « le candidat ne répond pas correctement à la question »
probabilité de l'échec : $P(\bar{S})=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}=0{,}25=q$

Les huit questions sont de même difficulté ; pour chacune des questions, le candidat a une probabilité de $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.
On effectue huit épreuve de Bernoulli indépendantes.
$Y$ est la variable aléatoire égale au nombre de succès en huit épreuves donc la loi de probabilité de $Y$ est la loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=\frac{3}{4}=0{,}75$.

**2.** $P(Y=8)=\left(\frac{3}{4}\right)^8=\frac{3^8}{4^8}=0{,}75^8$.

**3.** $E(Y)=np=8\times\frac{3}{4}=6$.

$V(Y)=npq=8\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5$.

**Partie III**

**1.** $Z=X+Y$
$E(Z)=E(X)+E(Y)=1{,}3+6=7{,}3$.
X et Y sont des variables aléatoires indépendantes donc :
$V(Z)=V(X)+V(Y)=0{,}57+1{,}5=2{,}07$.

**2.a.** $M_n=\frac{1}{n}Z_1+\frac{1}{n}Z_2+\ ...\ \frac{1}{n}Z_n$

Pour tout entier $i$ tel que $1\leqslant i\leqslant n$

$E\left(\frac{1}{n}Z_i\right)=\frac{1}{n}E(Z_i)=\frac{1}{n}E(Z)$

car $Z_i$ a la même loi de probabilité que $Z$.

$E(M_n)=n\left(\frac{1}{n}E(Z)\right)=E(Z)=7{,}3$

**2.b.** Pour tout entier $i$ tel que $1\leqslant i\leqslant n$

$V\left(\frac{1}{n}Z_i\right)=\frac{1}{n^2}E(Z_i)=\frac{1}{n^2}E(Z)$

car $Z_i$ a la même loi de probabilité que $Z$.
Les variables aléatoires $Z_i$ sont indépendantes

$V(M_n)=n\left(\frac{1}{n^2}V(Z)\right)=\frac{1}{n}E(Z)=\frac{1}{n}\times 2{,}07$

L'écart type de $M_n$ est : $\sigma(M_n)=\sqrt{\frac{2{,}07}{n}}$.

$\sigma(M_n)\leqslant 0{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{\frac{2{,}07}{n}}\leqslant 0{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2{,}07}{n}\leqslant 0{,}25 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2{,}07}{0{,}25}\leqslant n \quad\Leftrightarrow\quad 8{,}28\leqslant n$

$n$ est un entier donc $9\leqslant n$

$\sigma(M_n)\leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow n\geqslant 9$

**2.c.** $E(M_n)=7{,}3$

$6{,}3\leqslant M_n\leqslant 8{,}3 \quad\Leftrightarrow\quad -1\leqslant M_n-7{,}3\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1\leqslant M_n-E(M_n)\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad |M_n-E(M_n)|\leqslant 1$

$P(|M_n-E(M_n)|\leqslant 1)\geqslant 0{,}75 \quad\Leftrightarrow\quad P(|M_n-E(M_n)|>1)\leqslant 0{,}25$

- Rappel : Inégalité de Bienaymé-Tchébychev
  Soit $X$ une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $\sigma^2$.
  Pour tout nombre réel strictement positif $\alpha$, $P(|X-E(X)|>\alpha)\leqslant\frac{\sigma^2}{\alpha^2}$.
- Pour $n\geqslant 9$ $\quad\sigma^2\leqslant 0{,}25$
  $P(|M_n-E(M_n)|>1)\leqslant\frac{\sigma^2}{1^2}\leqslant 0{,}25$
- Pour $n\geqslant 9$ $\quad P(|M_n-E(M_n)|\geqslant 1)\geqslant 0{,}75$.