Exercice 6

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0=1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+2u_n}$.

. **Affirmation 1 :** « $u_4=\frac{1}{9}$ »

. **Affirmation 2 :** « Pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{1}{2n+1}$ »

. **Affirmation 3 :** « La suite numérique (u_n) est minorée par 10^{-10} »

CORRECTION

Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

$u_0=1 \qquad u_1=\frac{u_0}{1+2u_0}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$

$u_2=\frac{u_1}{1+2u_1}=\frac{1}{3} : \left(1+2\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3} : \frac{5}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$

$u_3=\frac{u_2}{1+2u_2}=\frac{1}{5} : \left(1+2\times\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5} : \frac{7}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{5}{7}=\frac{1}{7}$

$u_4=\frac{u_3}{1+2u_3}=\frac{1}{7} : \left(2\times\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7} : \frac{9}{7}=\frac{1}{7}\times\frac{7}{9}=\frac{1}{9}$

Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence que,pour tout entier naturel n, on a : $u_n=\frac{1}{2n+1}$.

Initialisation

$u_0=1$ et $\frac{1}{2\times 0+1}=1$ donc la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $u_n=\frac{1}{2n+1}$

et on doit démontrer que $u_{n+1}=\frac{1}{2(n+1)+1}$.

Or $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+2u_n}=\frac{1}{1\times 2n} : \left(1+\frac{2}{1+2n}\right)=\frac{1}{1+2n} : \left(\frac{1+2n+2}{1+2n}\right) =\frac{1}{1+2n} : \left(\frac{2n+3}{1+2n}\right)=\frac{1}{2n+1}\times\frac{1+2n}{2n+3}$

$u_{n+1}=\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{2(n+1)+1}$;

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n=\frac{1}{2n+1}$.

Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

Pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{1}{2n+1}$.

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n+1-2n-3}{(2n+3)(2n+1)}=\frac{-2}{(2n+3)(2n+1)}<0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Si la suite (u_n) était minorée par 10^{-10} alors la suite (u_n) serait convergente vers $L\geqslant 10^{-10}>0$.

Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$.

Donc l'hypothèse (u_n) est minorée par 10^{-10} est fausse.