Exercice 7

On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x)=x+k\,e^{-x}$ où k est un nombre réel strictement positif.

1. On s'intéresse dans cette question au cas $k=0,5$, donc à la fonction $f_{0,5}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_{0,5}(x)=x+0,5\,e^{-x}$.

1.a. Montrer que la dérivée de $f_{0,5}$, notée $f'_{0,5}$ vérifie $f'_{0,5}(x)=1-0,5\,e^{-x}$.

1.b. Motrer que la fonction $f_{0,5}$ admet un minimum en ln(0,5).

Soit k un réel strictement positif. On donne le tableau de variations de la fonction f_k .

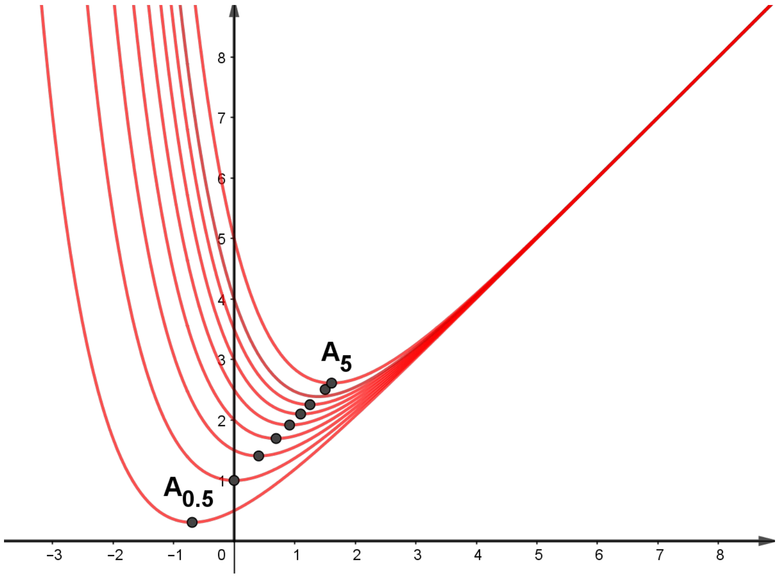
valeurs de x	$-\infty$	ln(k)	$+\infty$
variations de f_k	$+\infty$ ↘	f(ln(k))	↗ $+\infty$

2. Montrer que pour tout réel positif k, $f_k(\ln(k))=\ln(k)+1$.

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On note A_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse k.

On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



3. Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation : « Pour tout réel k strictement positif, les points A_0, A_1 et A_k sont alignés. »

CORRECTION

1.a. Pour tout nombre réel x : $(e^{-x})'=-e^{-x}$
donc $f'_{0,5}(x)=1+0,5\times(-e^{-x})=1-0,5e^{-x}$

1.b. $1-0,5e^{-x}=0 \Leftrightarrow 1=0,5e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x}=\dfrac{1}{0,5}=2 \Leftrightarrow -x=\ln(2) \Leftrightarrow x=-\ln(2)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln(0,5)$

$1-0,5e^{-x}>0 \Leftrightarrow 1>0,5e^{-x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{0,5}=2>e^{-x} \Leftrightarrow \ln(2)>-x \Leftrightarrow -\ln(2)<x \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)<x$
$\Leftrightarrow \ln(0,5)<x$

De même $1-0,5e^{-x}<0 \Leftrightarrow x<\ln(0,5)$

Conséquence

$f_{0,5}$ est décroissante sur $]-\infty;\ln(0,5)]$ et croissante sur $[\ln(0,5);+\infty[$ donc $f_{0,5}$ admet un minimum pour ln(0,5).

2. Pour tout réel nombre réel k strictement positif :

$f_k(\ln(k))=\ln(k)+k e^{-\ln(k)}=\ln(k)+k e^{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}=\ln(k)+k\times\dfrac{1}{k}=\ln(k)+1$.

3. Pour le dessin, on a tracé les courbes $\mathscr{C}_k$ pour les valeurs de k : 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 et 5 ; et on a placé les points $A_k(\ln(k);1+\ln(k))$ pour les valeurs précédentes de k.

Affirmation : VRAIE

Preuve

$A_{0,5}(\ln(0,5);1+\ln(0,5))$ $A_1(0;1)$ car $\ln(1)=0$.

Le coefficient directeur de la droite $(A_{0,5}A_1)$ est : $\dfrac{1-(1+\ln(0,5))}{0-\ln(0,5)}=1$.

$A_1(0;1)$ donc l'ordonnée à l'origine de la droite $(A_{0,5}A_1)$ est : 1.

L'équation réduite de $(A_{0,5}A_1)$ est : $y=x+1$.

Pour tout nombre réel k strictement positif $A_k(\ln(k);1+\ln(k))$, on a bien $y_{A_k}=x_{A_k}+1$
donc les points $A_{0,5}$; A_1 et A_k sont alignés.