Exercice 8

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0=0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n+1$.

1. On considère la fonction calcul écrite en langage Python qui renvoie la valeur de u_n .

```
def calcul(n):
  u=0
  for i in range(n):
    u=3*n+1
  return u
```

On considère par ailleurs la fonction liste écrite en langage Python :

```
def liste(n):
  l=[ ]
  for i range(n):
    l.append(calcul(i))
  return l
```

Affirmation 1 : « l'appel liste(6) renvoie la liste [0, 1, 4, 13, 42, 121] »

2. Affirmation 2 : « pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}$ »

3. Affirmation 3 : « pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n$ est un multiple de 3 ».

CORRECTION

1. Affirmation 1 : FAUSSE

Preuve

Rappels :

- pour $n=0$, la fonction calcul(0) renvoie $0=u_0$ car il n'existe pas d'entier naturel i in range(0).
- liste(6) renvoie [calcul(0),calcul(1),calcul(2),calcul(3),calcul(4),calcul(5)]= $[u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$

  $u_o=0$; $u_1=1$; $u_2=4$; $u_3=3\times4+1=13$; $u_4=3\times13+1=40$; $u_5=3\times40+1=121$

  or dans la liste donnée $42\neq40$ donc l'affirmation 1 est FAUSSE.

2. Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

On remarque : $\frac{1}{2}\times3^0-\frac{1}{2}=0=u_0$; $\frac{1}{2}\times3^1-\frac{1}{2}=1=u=1$ . . .

On conjecture que pour tout entier naturel n : $u_n=\frac{1}{2}\times3^n-\frac{1}{2}$.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n=\frac{1}{2}\times3^n-\frac{1}{2}$.

Initialisation

Pour $n=0$ $\quad u_0=0$ et $\frac{1}{2}\times3^0-\frac{1}{2}=0$ donc la propriété est vérifiées pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n=12\times3^n-\frac{1}{2}$

et on doit démontrer que $u_{n+1}=\frac{1}{2}\times3^{n+1}-\frac{1}{2}$.

Si $u_n=\frac{1}{2}\times3^n-\frac{1}{2}$ alors $u_{n+1}=3u_n+1=3\times(\frac{1}{2}\times3^n-\frac{1}{2})+1=\frac{1}{2}\times3^{n+1}-\frac{3}{2}+1=\frac{1}{2}+3^{n+1}-\frac{1}{2}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{1}{2}\times3^n-\frac{1}{2}$.

3. Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\times3^{n+1}-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\times3^n-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times3^{n+1}-\frac{1}{2}\times3^n=\frac{1}{2}\times3^n\times(3-1)=\frac{1}{2}\times3^n\times2=3^n$$

donc $u_{n+1}-u_n$ est un multiple de 3.