Exercice 1 6 points

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

. 25 % des connexions transitent via le serveur A ;
. 15 % des connexions transitent via le serveur B ;
. le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

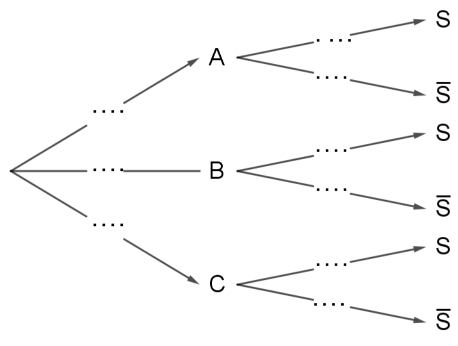
Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mise à jour de logiciels, etc.).
On dira qu'une connexions est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

. 90 % des connexions via le serveur A sont stables ;
. 80 % des connexions via le serveur B sont stables ;
. 85 % des connexions via le serveur C sont stables.
Les parties **A** et **B** sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

Partie A

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise.
On considère les événements suivants :
. A : « La connexion s'est effectuée via le serveur A » ;
. B : « La connexion s'est effectuée via le serveur B » ;
. C : « La connexion s'est effectuée via le serveur C » ;
. S : « La connexion est stable ».
On note $\overline{S}$ l'événement contraire de S.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable est passe par le serveur B est égale à 0,12.

3. Calculer la probabilité $P(C \cap \overline{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'événement S est $P(S)=0,855$.

5. On suppose désormais que la connexion est stable.
Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.
On donnera la valeur arrondie au millième.

Partie B

D'après la **partie A** , la probabilité qu'une connexion soit **instable** est égale à 0,145.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise dans cet échantillon de 50 connexions.

1.a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

1.b. Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables.
On donnera la valeur arrondie au millième.

2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de n connexions, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire égales aux nombres de connexions instables et on admet que X_n suit une loi binomiale de paramètres n et 0,145.

2.a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.

2.b. Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que la probabilité p_n est supérieure ou égale à 0,99.

3. On s'intéresse à la variable aléatoire F_n égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions, où n désigne un entier naturel strictement positif.
On a donc $F_n=\frac{X_n}{n}$, où X_n est la variable définie à la question **2**.

3.a. Calculer l'espérance $E(F_n)$.
On admet que $V(F_n)=\frac{0{,}123975}{n}$.

3.b. Vérifier que : $P(|F_n-0{,}145|\geqslant 0{,}1)\leqslant\frac{12{,}5}{n}$.

3.c. Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de 1000 connexions et constate que pour cet échantillon $F_{1000}=0{,}3$. Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs. A-t-il raison ?

CORRECTION

Partie A

1. L'énoncé précise :

. 25 % des connexions transitent via le serveur A donc $P(A)=0{,}25$

. 15 % des connexions transitent via le serveur B donc $P(B)=0{,}15$

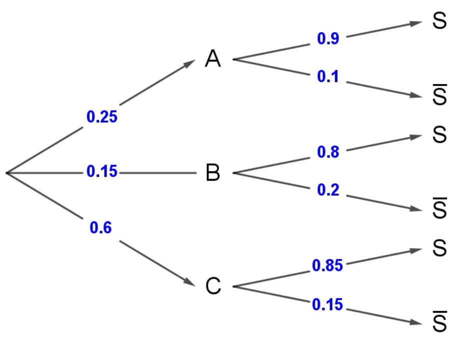
. Le reste des connexions s'effectue par le serveur C donc $P(C)=1-P(A)-P(B)=1-0{,}25-0{,}15=0{,}6$

. 90 % des connexions via le serveur A sont stables donc $P_A(S)=0{,}9$ et $P_A(\bar{S})=1-0{,}9=0{,}1$

. 80 % des connexions via le serveur B sont stables donc $P_B(S)=0{,}8$ et $P_B(\bar{S})=1-0{,}8=0{,}2$

. 85 % des connexions via le serveur C sont stables donc $P_C(S)=0{,}85$ et $P_C(\bar{S})=1-0{,}85=0{,}15$

. On complète l'arbre pondéré.



2. $P(B\cap S)=P(B)\times P_A(S)=0{,}15\times 0{,}8=0{,}12$.

3. $P(C\cap \bar{S})=P(C)\times P_C(\bar{S})=0{,}6\times 0{,}15=0{,}09$.

La probabilité que la connexion soit instable et transite par le serveur C est égale à 0,9.

4. En utilisant la formule des probabilités totales.

$P(S)=P(A\cap S)+P(B\cap S)+P(C\cap S)$

$P(S)=P(A)\times P_A(S)+P(B)\times P_B(S)+P(C)\times P_C(S)$

$P(S)=0{,}25\times 0{,}9+0{,}15\times 0{,}8+0{,}6\times 0{,}85$

$P(S)=0{,}225+0{,}12+0{,}51=0{,}855$

5. $P_S(B)=\dfrac{P(B\cap S)}{P(S)}=\dfrac{0{,}12}{0{,}855}=\dfrac{120}{855}=\dfrac{8}{57}$

$P_S(B)=0{,}140$ arrondi au millième

Partie B

1.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante : on choisit au hasard une connexion au réseau.

Succès : $\bar{S}$ « la connexion est instable » la probabilité de succès est : $p=0{,}145$

Échec : S « la connexion est stable » la probabilité d'échec est : $q=0{,}855$

On étudie un échantillon de 50 connexions indépendantes.

(on considère que le choix est assimilé à un tirage avec remise).

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 50 épreuves.

La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres 50 et 0,145.

1.b. En utilisant la calculatrice :

$P(X\leqslant 8)=0{,}704$ arrondi au millième.

2.a. X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0{,}145$.

On note M l'évènement : « au moins une connexion est instable ».

$\bar{M}$ est l'évènement : « toutes les connexions de l'échantillon sont stables »

$P(\overline{M})=0,855^n$ donc $p_n=1-P(M)=1-0,855^n$

2.b. $1-0,855^n\geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1-0,99\geqslant 0,855^n \Leftrightarrow 0,01\geqslant 0,855$

ln est une fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$

$\ln(0,01)\geqslant\ln(0,855^n) \Leftrightarrow \ln(0,01)\geqslant n\times\ln(0,855)$

$0<0,855<1$ donc $\ln(0,855)<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)}\leqslant n$

En utilisant la calculatrice : $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)}\simeq 29,4$, n est un *entier* F_n naturel donc $30\leqslant n$.

La plus petite valeur de n telle que $p_n\geqslant 0,99$ est $n=30$.

3.a. X_n suit la loi binomiale de paramètres n et 0,145 donc $E(X_n)=0,145\,n$.

$F_n=\dfrac{X_n}{n}$ $E(F_n)=\dfrac{E(X_n)}{n}=0,145$.

3.b. On admet que $V(F_n)=\dfrac{0,123975}{n}$ (on peut remarquer que $0,145\times 0,855=0,123975$).

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire F_n .

t est un réel strictement positif $P(|F_n-E(F_n)|\geqslant t)\leqslant\dfrac{V(F_n)}{t^2}$

on a $V(F_n)=\dfrac{0,123975}{n}$ et $t=0,1$ et $E(F_n)=0,145$

$P(|F_n-0,145|\geqslant 0,1)\leqslant\dfrac{0,123975}{0,1^2\times n}=\dfrac{12,3975}{n}$

$12,3975\leqslant 12,5$ on obtient : $P(|F_n-0,145|\geqslant 0,1)\leqslant\dfrac{12,5}{n}$.

3.c. En utilisant l'inégalité précédente : $P(|F_{1000}-0,145|\geqslant 0,1)\leqslant\dfrac{12,5}{1000}=0,0125$.

Or $F_{1000}=0,3$ et $F_{1000}-0,145=0,3-0,145=0,155>0,1$

Il y a 1,25 % de chance d'avoir un tel résultat.

On peut soupçonner un dysfonctionnement des serveurs.