Exercice 2 — 5 points

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0=2$ et pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$.

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.

2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par : $a_n=\frac{u_n}{u_n-1}$.

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

2.a. Calculer a_0 et a_1.

2.b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=3a_n-1$

2.c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur n supérieur ou égal à 1 : $a_n\geqslant 3n-1$.

2.d. En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

3.a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{a_n}{a_n-1}$.

3.b. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en Python :

```
def algo(p):
    u=2
    n=0
    while u-1>p:
        u=(2*u+1)/(u+2)
        n=n+1
    return(n,u)
```

4.a. Interpréter les valeurs n et u renvoyées par l'appel de la fonction algo(p) dans le contexte de l'exercice.

4.b. Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p=0{,}001$.

CORRECTION

1. $u_1=\frac{2\times 2-1}{2+2}=\frac{5}{4}=1{,}25$.

2.a. $a_0=\frac{u_0}{u_0-1}=\frac{2}{2-1}=2$.

$a_1=\frac{u_1}{u_1-1}=\frac{5}{4}:\left(\frac{5}{4}-1\right)=\frac{5}{4}:\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\times 4=5$.

2.b. Pour tout entier naturel n :

$a_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}:\left(\frac{2u_n+1}{u_n+2}-1\right)=\frac{2u_n+1}{u_n+2}:\frac{u_n-1}{u_n+2}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=\frac{2u_n+1}{u_n-1}$

$a_{n+1}+1=\frac{2u_n+1}{u_n-1}+1=\frac{2u_n+1+u_n-1}{u_n-1}=\frac{3u_n}{u_n-1}=3a_n$

donc $a_{n+1}=3a_n-1$

2.c. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a : $a_n\geqslant 3n-1$.

Initialisation

Pour $n=1$ $a_1=5$ et $3\times 1-1=2$ donc $a_1\geqslant 3\times 1-1$.

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $a_n\geqslant 3n-1$ et on doit démontrer que $a_{n+1}\geqslant 3(n+1)-1$, c'est à dire $a_{n+1}\geqslant 3n+2$

Or pour tout entier naturel non nul n, on a :

$a_{n+1}=3a_n-1$ et $a_n\geqslant 3n-1$ on obtient :

$a_{n+1}\geqslant 3\times(3n-1)-1=9n-4=3n+2+6n-6=3n+2+6\times(n-1)$.

On a : $6\times(n-1)\geqslant 0$ donc $a_{n+1}\geqslant 3n+2$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $a_n\geqslant 3n-1$.

2.d. $\lim_{n\to+\infty}(3n-1)=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.

3.a. $a_n=\frac{u_n}{u_n-1}$ $\Leftrightarrow$ $a_n\times(u_n-1)=u_n$ $\Leftrightarrow$ $a_n\times u_n-a_n=u_n$ $\Leftrightarrow$ $a_n\times u_n-u_n=a_n$ $\Leftrightarrow$ $u_n\times(a_n-1)=a_n$

$\Leftrightarrow$ $u_n=\frac{a_n}{a_n-1}$

3.b. $u_n=\frac{a_n}{a_n-1}=\frac{a_n-1+1}{a_n-1}=1+\frac{1}{a_n-1}$

$\lim_{n\to+\infty}(a_n-1)=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_n-1}\right)=0$ et $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

4.a. Si $p\geqslant 1$ alors l'algorithme retourne $(0;2)$.

Si $0<p<1$ alors l'algorithme retourne la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n<1+p$ et une valeur approchée de u_n .

Par exemple pour $0{,}25\leqslant p<1$ l'algorithme retourne $(1;1{,}25)$.

4.b. On peut exécuter l'algorithme pour algo(0,001) on obtient $n=6$ et pour valeur approchée de u_6 à 10^{-4} près : $1{,}0009$.

On peut utiliser la calculatrice pour obtenir les premiers termes de la suite, on arrête pour n=6.

Si on dispose d'un tableur sur la calculatrice on obtienr aussi le résultat.