Exercice 3 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes,indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=3-2t \\ y=-1 \\ z=2-6t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

On considère également les points suivants :

- $A(3;-3;-2)$
- $B(5;-4;-1)$
- C est le point de la droite (d) d'abscisse 2.
- H le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x+3z-7=0$.

Affirmation 1
La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2
Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne.

$$x+3z+3=0$$

Affirmation 3
Une mesure , exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{6}$.

Affirmation 4
La distance BH est égale à $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

CORRECTION

Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

(d) est la droite passant par le point $E(3;-1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$.

L'axe des ordonnées est la droite passant par le point $O(0;0;0)$ et de vecteur directeur $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires donc la droite (d) et l'axe des ordonnées ne sont pas parallèles.
On détermine l'intersection de (d) et l'axe des ordonnées.

(d) : $\begin{cases} x=3-2t \\ y=-1 \\ z=2-6t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ axe des ordonnées : $\begin{cases} x=0 \\ y=r \\ z=0 \end{cases}$ $r\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} 3-2t=0 \\ -1=r \\ 2-6t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1{,}5 \\ r=-1 \\ t=\frac{1}{3} \end{cases}$ donc l'axe des ordonnées et la droite (d) ne sont pas sécants.

Conséquence : l'axe des ordonnées et la droite (d) ne sont coplanaires.

Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

Soit $\mathscr{R}$ le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) donc $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{R}$.

Le plan $\mathscr{R}$ a pour équation cartésienne : $-2x+0y-6z+k=0$ où k est une constante réelle.
$A(3;-3;-2)$ appartient au plan $\mathscr{R}$.
$-2\times3+0\times(-3)-6\times(-2)+k=0 \Leftrightarrow 6+k=0 \Leftrightarrow k=-6$
$\mathscr{R}:\ -2x-6z-6=0 \Leftrightarrow \mathscr{R}:\ x+3z+3=0$

Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

On détermine les coordonnées du point C le point de (d) d'abscisse 2.

$\begin{cases} 2=3-2t \\ y=-1 \\ z=2-6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ x=2 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$ donc $C(2;-1;-1)$.

$A(3;-3;-2)$, $B(5;-4;-1)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$ $AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\times(-1)-2\times1+1\times1=-2-2+1=-3$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$
$-3=\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC})=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$ donc $\widehat{BAC}=-\frac{2\pi}{3}$.

Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

H est le projeté orthogonal de B sur le plan $\mathscr{P}$ donc (BH) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

(BH) est ladroite passant par $B(5;-4;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.

(BH) : $\begin{cases} x=s+5 \\ y=-4 \\ z=6s-1 \end{cases}$ $s\in\mathbb{R}$

Pour déterminer les coordonnées du point H, on résout le système :

$$\begin{cases} x+3z-7=0 \\ x=s+5 \\ y=-4 \\ z=3s-1 \end{cases}$$

On obtient : $(s+5)+3(3s-1)-7=0 \quad \Leftrightarrow \quad 10s-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad s=\frac{1}{2}$.

$x=\frac{1}{2}+5=\frac{11}{2} \qquad y=-4 \qquad z=3\times\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2} \qquad H\left(\frac{11}{2};-4;\frac{1}{2}\right)$

$B(5;-4;-1)$

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} \qquad BH^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{10}{4} \qquad BH=\frac{\sqrt{10}}{2}$

