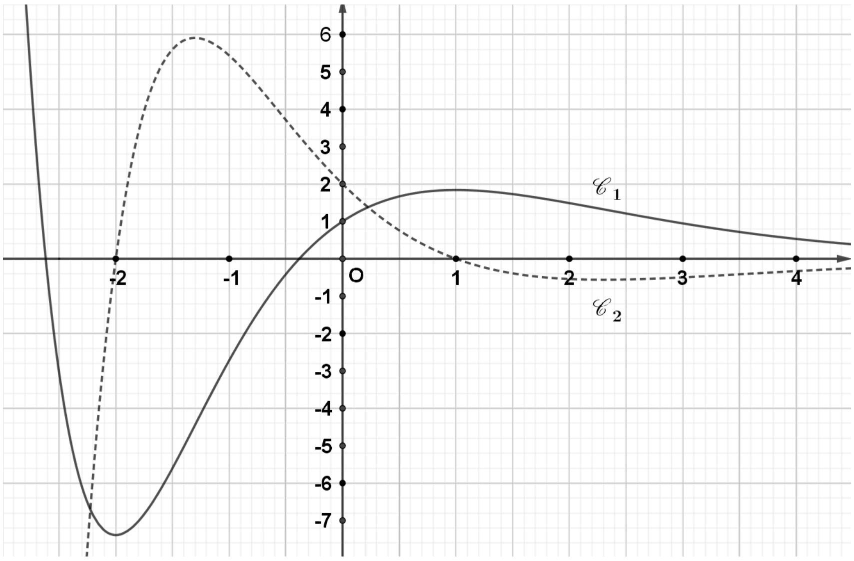
Exercice 4 5 points

La partie **C** est indépendante des parties **A** et **B.**

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_1$ est $\mathscr{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g′ ;
On précise également que :
. La courbe $\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;1)$.
. La courbe $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2;0)$ et $(1;0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g′ sa représentation graphique.

2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point d'abscisse 0 est $y=2x+1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle :
$y+y'=(2x+3)e^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout réel x par $f_0(x)=(x^2+2x)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y+y'=0$.

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E). Déterminer alors l'expression de la fonction g.

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre x par : $f(x)=(x^2+3x+2)e^{-x}$.

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
2.a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=(-x^2-x+1)e^{-x}$.
2.b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

4. On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x)=(-x^2-5x-7)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f.
Soit α un réel positif.
Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par l'axe des abscisses la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$.

CORRECTION

Partie A

1. $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative d'une fonction f_1 positive sur $]-\infty;x_1[$ et sur $]x_2;+\infty[$, négative sur $]x_1;x_2[$ et décroissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]1;+\infty[$, croissante sur $]-2;1[$, par lecture graphique $x_1\simeq-2{,}5$ et $x_2\simeq-0{,}3$.
$\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative d'uns fonction f_2 négative sur $]-\infty;-2[$ et sur $]1:+\infty[$, positive sur $]-2:1[$ et croissante sur $]-\infty;x_3[$ et sur $]2;+\infty[$, décroissante sur $]x_3;2[$, $x_3\simeq-1{,}4$.
Conséquence
En comparant le signe d'une fonction avec les variations de l'autre on peut affirmer que :
$\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de **g** et $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de **g'**.

2. $g(0)=1$ et $g'(0)=2$ donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0 est égal à 2 et l'ordonnée à l'origine est égale à 1 donc l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0 est $y=2x+1$.

Partie B

1. Pour tout nombre réel x, $f_0(x)=(x^2+3x)e^{-x}$
$u(x)=x^2+3x \qquad u'(x)=2x+3 \qquad v(x)=e^{-x} \qquad v'(x)=-e^{-x}$
donc $f_0'(x)=(2x+3)e^{-x}+(x^2+3x)(-e^{-x})=(-x^2-3x+2x+3)e^{-x}=(-x^2-x+3)e^{-x}$.
Pour tout nombre réel x :
$f_0(x)+f_0'(x)=(x^2+3x)e^{-x}+(-x^2-x+3)e^{-x}=(2x+3)e^{-x}$
f_0 est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. $(E_0):\ y+y'=0 \iff (E_0):\ y'=-y$
Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$h_k(x)=k\,e^{ax}$ où k est une constante réelle.
Donc les solutions de l'équation différentielle (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$h_k(x)=k\,e^{-x}$ où k est une constante réelle.

3. Pour tout nombre réel x, $f_0(x)+f_0'(x)=(2x+3)e^{-x}$.
p est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout nombre réel x, on a :
$p(x)+p'(x)=f_0(x)+f_0'(x) \iff (p-f_0)(x)+(p-f_0)'(x)=0 \iff p-f_0$ est solution de (E_0)
$\iff$ pour tout nombre réel x, $(p-f_0)(x)=k\,e^{-x}$ où k est une constante réelle
$\iff p(x)=k\,e^{-x}+f_0(x)=k\,e^{-x}+(x^2+3x)e^{-x}=(x^2+3x+k)e^{-x}$
Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $p_k(x)=(x^2+3x+k)e^{-x}$ où k est une constante réelle.

4. On admet que g est une solution de (E), donc il existe un réel k tel que, pour tout nombre réel x $g(x)=(x^2+3x+k)e^{-x}$. Et $g(0)=k$, or dans la **partie A** on donne $g(0)=1$, conséquence : $k=1$.
Pour tout nombre réel x, $g(x)=(x^2+3x+1)e^{-x}$.

5. Pour tout réel k, $p_k(x)=(x^2+3x+k)e^{-x}$.
p_k est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
$p'_k(x)=(2x+3)e^{-x}+(-x^2-3x-k)e^{-x}=(-x^2-x+3-k)e^{-x}$
$p_k''(x)=(-2x-1)e^{-x}+(x^2+x-3+k)e^{-x}=(x^2-x-4+k)e^{-x}$
Pour tout nombre réel x, $e^{-x}>0$.

Donc le signe de $p_k''(x)$ est le signe de $T(x)=x^2-x-4+k$.
$\Delta=1-4\times(-4+k)=1+16-4k=17-4k$.
$T(x)$ admet deux racines distinctes (ev changeant de signe) si et seulement si $17-4k>0$.
La courbe représentative de p_k admet exactement deux points d'inflexion si et seulement si $k<\dfrac{17}{4}$.

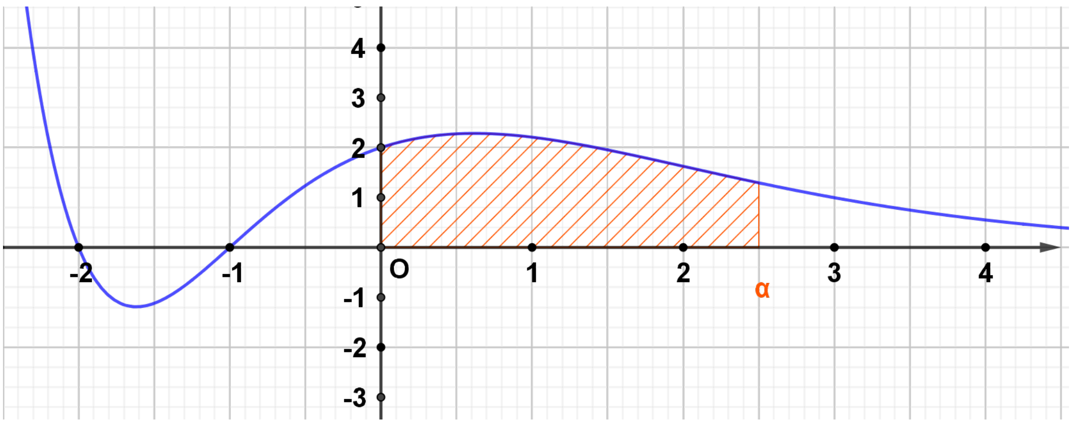
Partie C

1. Pour tout nombre réel x, $f(x)=(x^2+3x+2)e^{-x}$.
Remarque : f est la solution de (E) telle que $k=2$.
$f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}+3\times\dfrac{x}{e^x}+2\times\dfrac{1}{e^x}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}\right)=0$
et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))=0$.
On admet que : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x))=+\infty$.

2.a. $f'(x)=(2x+3)e^{-x}+(-x^2-3x-2)e^{-x}=(-x^2-x+1)e^{-x}$
2.b. $t(x)=-x^2-x+1$
$\Delta=1-4\times1\times(-1)=5$ $\quad x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{-2}=-0,5+\sqrt{5}>0$ $\quad x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{-2}=-0,5-\sqrt{5}<0$
On donne les variations de f sous la forme d'un tableau.

x	-∞		x_2		0		x_1		+∞
$f'(x)$		−	0	+		+	0	−	
f(x)	+∞	↘	$f(x_2)$	↗	2	↗	$f(x_1)$	↘	0

3. f est strictement croissante sur $[0;x_1]$ donc pour tout x appartenant à $[0;x_1]$ on a : $f(x)\geqslant f(0)=2>0$
f est strictement décroissante sur $[x_1;+\infty[$ donc pour tout x appartenant à $[x_1;+\infty[$ on a :
$f(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))=0$.
f est positive sur $[0;+\infty[$.
4. f est continue et positive sur $[0;+\infty[$, donc :
$\mathcal{A}(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=[F(x)]_0^{\alpha}=(-\alpha^2-5\alpha-7)e^{-\alpha}+7$



On donne une figure non demandée.