Exercice 1 — 5 points

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.
Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

L'entraîneur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entraînement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de 0,32.
lors d'un entraînement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.
On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.
Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.
3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.
4. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire N.
5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.
5.a. Exprimer T en fonction de N.
5.b. En déduire l'espérance de la variable T. Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
5.c. Calculer $P(12 \leqslant T \leqslant 18)$.

Partie B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.
On admet que $E(X)=22$ et la variance $V(X)=65$.
Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.
On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1er, 2ème . . nième matchs. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X.
On pose $M_n = \dfrac{X_1+X_2+\dots X_n}{n}$.

1. Dans cette question, on prend $n=50$.
1.a. Que représente la variable aléatoire M_{50} ?
1.b. Déterminer l'espérance et la variance de M_{50} ?
1.c. Démontrer que $P(|M_{50}-22| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{13}{90}$.
1.d. En déduire que la probabilité de l'évènement : « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieur à 0,85.

2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
« il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n-22| \geqslant 3) < 0{,}01$ »

CORRECTION

Partie A

1. Les paramètres de la loi binomiale de la variable aléatoire N sont : $n=15$ et $p=0,32$.

2. $P(N=4)=\binom{15}{4}\ 032^{4}\times(1-0,33)^{11}$.

En utilisant la calculatrice :
$P(N=4)=0,206$ arrondi au millième.

3. En utilisant la calculatrice :
$P(N\leqslant 6)=0,828$ arrondi au millième.

4. $E(N)=np=15\times 0,32=4,8$.

5.a. La réussite d'un lancer donne 3 points donc $T=3N$.

5.b. $E(T)=E(3N)=3E(N)=3\times 4,8=14,4$
En moyenne, pour 150 lancers Victor marque 144 points.

5.c. $P(12\leqslant T\leqslant 18)=P(12\leqslant 3N\leqslant 18)=P(4\leqslant N\leqslant 6)$.
En utilisant la caculatrice on obtient :
$P(12\leqslant T\leqslant 18)=0,586$ arrondi au millième.

Partie B

1.a. M_{50} est la moyenne des points marqués par Victor par match sur les 50 matchs.

1.b. $M_{50}=\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_{50}}{50}=\dfrac{X_1}{50}+\dfrac{X_2}{50}+\ldots+\dfrac{X_{50}}{50}$

$E(M_{50})=E\left(\dfrac{X_1}{50}\right)+E\left(\dfrac{X_2}{50}\right)+\ldots+E\left(\dfrac{X_{50}}{50}\right)=\dfrac{1}{50}E(X_1)+\dfrac{1}{50}E(X_2)+\ldots+\dfrac{1}{50}E(X_{50})$.

Les 50 variables aléatoires $X_1;X_2;\ldots,X_{50}$ ont la même loi de probabilité celle de X, donc :
$E(X_1)=E(X_2)=\ldots=E(X_{50})=E(X)=22$

$E(M_{50})=50\times\left(\dfrac{1}{50}E(X)\right)=E(X)=22$

Les 50 variables aléatoires $X_1;X_2;\ldots;X_{50}$ sont indépendantes donc :

$V(M_{50})=V\left(\dfrac{X_1}{50}\right)+V\left(\dfrac{X_2}{50}\right)+\ldots+V\left(\dfrac{X_{50}}{50}\right)=\dfrac{1}{50^2}V(X_1)+\dfrac{1}{50^2}V(X_2)+\ldots+\dfrac{1}{50^2}V(X_{50})$

Or $V(X_1)=V(X_2)=\ldots=V(X_{50})=V(X)=65$

$V(M_{50})=\dfrac{1}{50^2}(50\times 65)=\dfrac{65}{50}=1,3$

1.c. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
Pour toute variable aléatoire Y et tout nombre réel β strictement positif, on a

$P(|Y-E(Y)|\geqslant\beta)\leqslant\dfrac{V(Y)}{\beta^2}$

Pour $Y=M_{50}$ $E(Y)=22$ $V(Y)=1,3$ et $\beta=3$

$P(|M_{50}-22|\geqslant 3)\leqslant\dfrac{1,3}{3^2}=\dfrac{13}{90}$

1.d. $P(19<M_{50}<25)=1-P(|M_{50}-22|\geqslant 3)\geqslant 1-\dfrac{13}{90}=\dfrac{77}{90}\simeq 0,855$ valeur approchée par défaut au millième :

$0,855>0,85$ donc la propriété est vérifiée.

2. $E(M_n)=E(X)=22$ $V(M_n)=\dfrac{1}{n^2}(n\times 65)=\dfrac{65}{n}$ et $P(|M_n-22|\geqslant 3)\leqslant\dfrac{65}{9n}$

$\dfrac{65}{9n}<0,01 \Leftrightarrow \dfrac{65}{9}<0,01n \Leftrightarrow \dfrac{6500}{9}<n \Leftrightarrow 723\leqslant n$

Affirmation FAUSSE, il suffit de choisir $n=273$.

