Exercice 2 — 5 points

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel ln(2), en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI$^{\text{ème}}$ siècle.
On désigne par (u_n) la suite définie par : $u_0=2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$.

Partie A

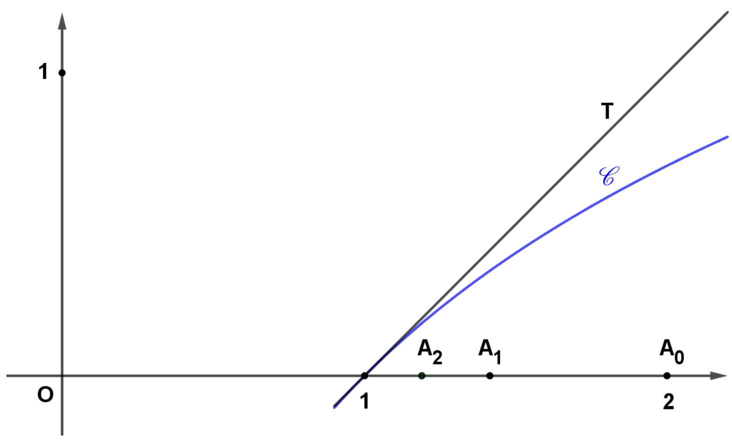
1.a. Donner la valeur de u_1 et de u_2 .
1.b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite

2.a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.
2.b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
2.c. Résoudre dans l'intervalle $[0;+\infty[$ l'équation $\sqrt{x}=x$.
2.d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) .

Partie B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=\ln(u_n)$.
1.a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
1.b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
1.c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\ln(2)=2^n\ln(u_n)$.

2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
Une équation de la droite T est : $y=x-1$.
Les points A_0, A_1, A_2 , ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



On décide de prendre $x-1$ comme approximation de ln(x) lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99;1{,}01[$

2.a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0{,}99;1{,}01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.
2.b. En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.
2.c. Déduire des questions **1.c.** et **2.b.** de la **partie B** une approximation de ln(2).

3. On généralise la méhode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel Briggs(a) renvoie une approximation de ln(a)
On rappelle que l'instruction en langage python sqrt(a) correspond à $\sqrt{a}$.

```
from math import*
def Briggs(a):
  n=0
  while a>=1.01:
    a=sqrt(a)
    n=n+1
  L= . . .
return L
```

CORRECTION

Partie A

1.a. $u_0=2$ et $u_1=\sqrt{2}$ et $u_2=\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}$

1.b. En utilisant la calculatrice, on peut donner des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n), en effectuant des boucles ou si la calculatrice dispose d'un tableur on obtient facilement des valeurs approchées des premiers termes.
Tableur avec 5 décimales :
$u_1=1{,}41421$
$u_2=1{,}18921$
$u_3=1{,}09051$
$u_4=1{,}04427$
On peut remarquer que la partie décimale d'un rang au suivant est plus que divisée par deux).
On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et admet pour limite 1.

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout nombre naturel n, on a : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.
Initialisation
$u_0=2$ et $u_1=\sqrt{2}\simeq 1{,}414$ donc $1\leqslant u_1\leqslant u_0$.
La propriété est vérifiée pour $n=0$.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ et on doit démontrer que $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$.
La fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.
Si $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ alors $\sqrt{1}\leqslant\sqrt{u_{n+1}}\leqslant\sqrt{u_n}$.
Or $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{u_{n+1}}=u_{n+2}$ et $\sqrt{u_n}=u_{n+1}$ .Donc $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$
Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

2.b. Pour tout entier naturel n, on a : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1.
Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$.

2.c. $\begin{cases} x\geqslant 0\\ \sqrt{x}=x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0\\ x=x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0\\ x(x-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \{x=0 \text{ ou } x=1$

$\mathscr{S}=\{0;1\}$

2.d. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$.
La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$.
Le théorème du point fixe, précise que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$ alors $\sqrt{L}=L$.
On a donc L=0 ou L=1, or pour tout entier naturel n, on a $1\leqslant u_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

Partie B

1.a. Pour tout entier naturel n, $v_n=\ln(u_n)$.
Donc $v_{n+1}=\ln(u_{n+1})=\ln(\sqrt{u_n})=\frac{1}{2}\ln(u_n)=\frac{1}{2}v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison : $\frac{1}{2}$.

1.b. $v_0=\ln(u_0)=\ln(2)$ donc (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=\ln(2)$ et de raison $q=\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel n : $v_n=v_0\times q^n=\ln(2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1.c. $v_n=\ln(u_n)=\ln(2)\times\left(\frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow \ln(2)=2^n\times\ln(u_n)$

2.a. En utilisant la calculatrice soit en boucles ou soit en utilisant le tableur, on obtient :

$u_5=1{,}02190$

$u_6=1{,}01089$

$u_7=1{,}00543$

Le plus petit entier k tel que $u_k\in]0{,}99;1{,}01[$ est égal à 7 et $u_7=1{,}00543$ à 10^{-5} près.

2.b. $\ln(u_7)\simeq u_7-1=0{,}00543$.

2.c. $\ln(2)=2^7\times\ln(u_7)\simeq 2^7\times 0{,}00543=0{,}69504$

Remarque :

La calculatrice donne comme valeur approchée à 10^{-5} près de ln(2) : 0,69314

La méthode ne donne qu'une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. Il faut écrire en langage Python : $2^n\times(a-1)$ soit L=2**n*(a-1).

```
from math import*
def Briggs(a):
  n=0
  while a>=1.01:
    a=sqrt(a)
    n=n+1
  L= 2**n*(a-1)
return L
```