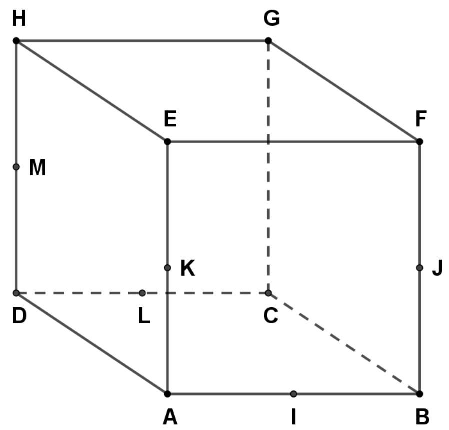
Exercice 3 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Partie A



ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1. Les points I, J,K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].

Affirmation 1 : « $\overrightarrow{JH}=2\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{CB}$ ».

Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AG})$ est une basse de l'espace ».

Affirmation 3 : « $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{LM}=-\frac{1}{4}$ ».

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :
. le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x-y+3z+6=0$
. les points $A(2;0;-1)$ et $B(5;-3;7)$ Le plan

Affirmation 4 : « Le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont parallèles ».

Affirmation 5 : « Le plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ passant par B a pour équation cartésienne $-2x+y-3z+34=0$ ».

Affirmation 6 : « La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\frac{\sqrt{14}}{2}$ ».

On note (d) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=-12+2k \\ y=6 \\ z=3-5k \end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires ».

CORRECTION

Partie A

Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

I est le milieu de [AB] donc $2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}$ on a aussi $-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}$.
ABCD est un carré donc $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.

ABCDEFGH est un cube donc $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{JF}$.

On obtient : $2\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{JF}=\overrightarrow{JH}$.

Affirmation 2 : FAUSSE

Preuve

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HG}$ donc le quadrilatère ABGH est un parallélogramme et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AG}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AG})$ n'est pas une base de l'espace.

Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{IL}$ donc le quadrilatère KMLI est un parallélogramme et $\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{IK}$.
Dans le plan (ABF) :
le triangle AIK est rectangle isocèle en A

$\widehat{AIK}=\frac{\pi}{4}rd$ ou $\widehat{AIK}=45°$

$\widehat{BIK}=\widehat{BIA}-\widehat{AIK}$

$\widehat{BIK}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ ou $\widehat{BIK}=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos(135^\circ)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$IB=\frac{1}{2}$ $\quad IK=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IK}=IB\times IK\times\cos(\widehat{BIK})=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$.

Conséquence : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{LM}=-\frac{1}{4}$

Partie B

Affirmation 4 : FAUSSE

Preuve

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{N}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

La droite (AB) est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{N}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{AB}.\vec{N}=3\times2+(-3)\times(-1)+8\times3=33\neq0$

Affirmation 5 : VRAIE

Preuve

$\vec{N}_1\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan d'équation cartésienne : $-2x+y-3z+34=0$

$\vec{N}_1=-\vec{N}$ donc ce plan est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
$B(5;-3;7)$ $\quad -2\times5-3-3\times7+34=-10-3-21+34=0$ donc B appartient à ce plan et $\mathscr{P}'$ est le plan d'équation cartésienne : $-2x+y-3z+34=0$.

Affirmation 6 : **VRAIE**

Preuve

Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$, H est le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et (δ_A) la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par A.

AH est la distance du point A au plan $\mathscr{P}$.

$\vec{N}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (δ_A). (δ_A) : $\begin{cases}x=2+2t\\y=0-t\\z=-1+3t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

On résout le système :

$\begin{cases}2x-y+3z+6=0\\x=2+2t\\y=0-t\\z=-1+3t\end{cases}$ on obtient : $2\times(2+2t)+t+3\times(-1+3t)+6=0 \Leftrightarrow 4+4t+t-3+9t+6=0$

$\Leftrightarrow 14t+7=0 \Leftrightarrow t=-\frac{7}{14}=-\frac{1}{2}$

$x=2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ $y=\frac{1}{2}$ $z=-1+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}$

$H\left(1;\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$ $A(2;0;-1)$ $AH^2=(1-2)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(-\frac{5}{2}+1\right)^2=1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{14}{4}$ $AH=\frac{\sqrt{14}}{2}$

Affirmation 7 : **FAUSSE**

Preuve

(d) : $\begin{cases}x=-12+2k\\y=6\\z=3-5k\end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$ (AB) : $\begin{cases}x=2+3t\\y=0-3t\\z=-1+8t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

Pour déterminer l'intersection des droites, on résout le système :

$\begin{cases}-12+2k=2+3t & (1)\\6=0-3t & (2)\\3-5k=-1+8t & (3)\end{cases}$

(2) $t=-2$ (1) $-12+2k=2-6 \Leftrightarrow k=4$ (3) $3-5k=-1-16 \Leftrightarrow -5k=-20 \Leftrightarrow k=4$

Les droites (AB) et (d) sont sécantes en $R(-4;6;-17)$ et les droites (AB) et (d) sont coplanaires.