Exercice 4 — 5 points

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par : $f(x)=e^x\sin(x)$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

Partie A

1.a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;\pi]$, $f'(x)=e^x(\sin(x)+\cos(x))$.

1.b. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2.a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

2.b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2.c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $e^x\sin(x)\geqslant 0$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de f est un point d'inflexion.

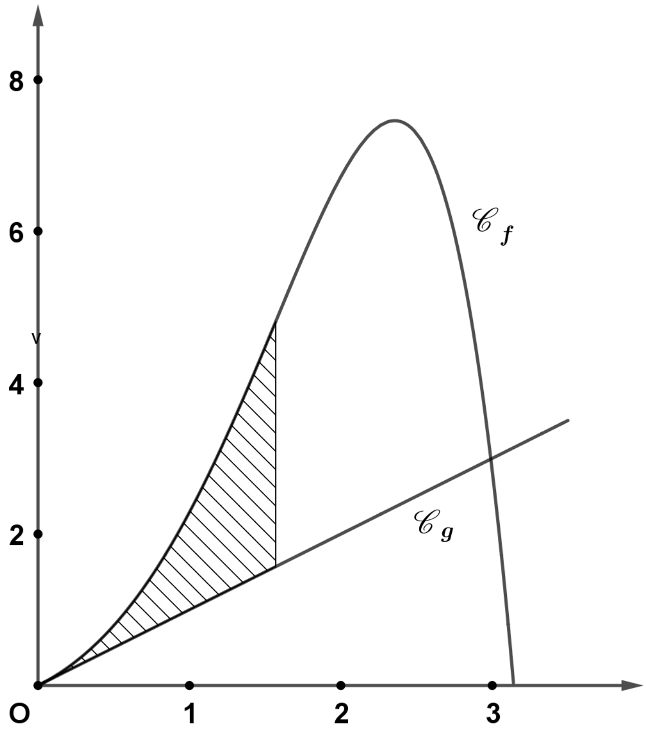
Partie B

On note : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(x)\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\,dx$.

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :
$I=1+J$ et $I=e^{\frac{\pi}{2}}-J$

2. En déduire que $I=\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x$.
Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans un repère orthogonal ,ci-après sur l'intervalle $[0;\pi]$.
Calculer la valeur exacte du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$.


8
6
4
2
O
1
2
3
$\mathscr{C}_f$
$\mathscr{C}_g$

CORRECTION

Partie A

1.a. Pour tout nombre réel x de $[0;\pi]$, $f(x)=e^x\sin(x)$;
f est dérivable sur $[0;\pi]$ $(e^x)'=e^x$ $(\sin(x))'=\cos(x)$
donc $f'(x)=e^x\sin(x)+e^x\cos(x)=e^x(\sin(x)+\cos(x))$.

1.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x)>0$ et $\sin(x)>0$ donc $\sin(x)+\cos(x)>0$.
$\sin(0)+\cos(0)=0+1>0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+0>0$ donc pour tout x de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
$\sin(x)+\cos(x)>0$ et $e^x>0$ donc $f'(x)>0$ et f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2.a. $f(0)=0$ et $f'(0)=e^0(\sin(0)+\cos(0))=1$.
La tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite passant par l'origine et de coefficient directeur 1.
$y=x$ est une équation de T.

2.b. f est deux fois dérivable sur $[0;\pi]$.
$(\sin(x)+\cos(x))'=\cos(x)-\sin(x)$
$f''(x)=e^x(\sin(x)+\cos(x))+e^x(\cos(x)-\sin(x))=2e^x\cos(x)$.
Pour tout nombre réel x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x)\geqslant 0$ donc $f''(x)\geqslant 0$ et f est convexe sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2.c. f est convexe sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de toutes ses tangentes sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, en particulier $\mathscr{C}_f$ est dessus de T sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout nombre réel de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $f(x)\geqslant g(x)$ $\Leftrightarrow$ $e^x\sin(x)\geqslant x$.

3. On détermine le signe de $f''(x)$ sur $[0;\pi]$. $f''(x)=2e^x\cos(x)$.
Le signe de $f''(x)$ est le signe de cos(x) sur $[0;\pi]$.

x	**0**		$\frac{\pi}{2}$		**π**
$f''(x)$		+	0	−	

f'' change de signe en $\frac{\pi}{2}$ donc le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Partie B

1. 1ère méthode

$f(x)=e^x\sin(x)$
$u_1(x)=e^x$ $u_1'(x)=e^x$
$v_1'(x)=\sin(x)$ $v_1(x)=-\cos(x)$

$I=[e^x(-\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\cos(x))\,dx$

$I=e^{\frac{\pi}{2}}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-e^0(-\cos(0))+J=1+J$

. 2ème méthode

$u_2(x)=\sin(x)$ $u_2'(x)=\cos(x)$
$v_2'(x)=e^x$ $v_2(x)=e^x$

$$I=[e^x(\sin(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\,dx$$

$$I=e^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-e^0\sin(0)=e^{\frac{\pi}{2}}-J\ .$$

2. $I=1+J=e^{\frac{\pi}{2}}-J$ donc $J=I-1$ et $I=\frac{e^{\pi}}{2}-(I-1)=e^{\frac{\pi}{2}}-I+1 \quad\Leftrightarrow\quad 2I=e^{\frac{\pi}{2}}+1$

conséquence : $I=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$.

3. f et g sont continues sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et f' et g' sont continues sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $f(x)\geqslant g(x)$ donc l'aire (en unité d'aire) du domaine situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$ est égal à :

$$\mathscr{A}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)-g(x))\,dx \text{ en U.A.}$$

$$\mathscr{A}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = I-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathscr{A}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}-\frac{\pi^2}{8} \text{ U.A.}$$

Remarque :
L'unité d'aire est l'aire d'un rectangle.
On donne une figure non demandée.