

Exercice 1

4 points

Un étudiant mange tous les jours au restaurant universitaire. Ce restaurant propose des plats végétariens et des plats non végétariens.

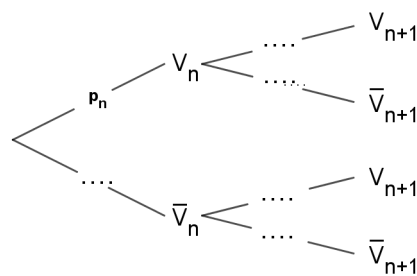
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9.
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat non végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,7.

Pour tout entier naturel n , on note V_n l'évènement : « l'étudiant a choisi un plat végétarien le $n^{\text{ème}}$ jour » et p_n la probabilité de V_n .

Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi le plat végétarien. On a donc $p_1 = 1$.

- Indiquer la valeur de p_2 .
- Montrer que $P_3 = 0,33$. on pourra s'aider d'un arbre pondéré.
- Sachant que le 3^{ème} jour l'étudiant a choisi un plat végétarien, quelle est la probabilité qu'il ait choisi un plat non végétarien le jour précédent ?
On arrondira le résultat à 10^{-2} .

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



- Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,2 p_n + 0,7$.
- On souhaite disposer de la liste des premiers termes de la suite (p_n) pour $n \geq 1$.
Pour cela, on utilise une fonction appelée `repas` programmée en langage Python dont on propose trois versions, indiquées ci-dessous.

programme 1

```

1 def repas(n):
2     p=1
3     L=[p]
4     for k in range(1,n):
5         p=0.2*p+0.7
6         L.append(p)
7     return(L)
```

programme 2

```

1 def repas(n):
2     p=1
3     L=[p]
4     for k in range(1,n+1):
5         p=0.2*p+0.7
6         L.append(p)
7     return( L)
```

programme 3

```

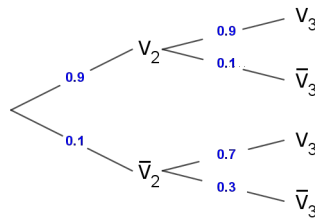
1 def repas(n)
2     p=1
3     L=[p]
4     for k in range(1,n):
5         p=0.2*p+0.7
6         L.append(p+1)
7     return(L)
```

- Lequel de ces programmes permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) ?
Aucune justification n'est attendue.
 - Avec le programme choisi à la question a donner le résultat affiché pour $n=5$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$.
 - En déduire la limite de la suite (p_n) .

CORRECTION

1.a. Le 1^{er} jour l'étudiant a pris un plat végétarien donc le 2^{ème} jour la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien est de 0,9. $p_2=0,9$.

1.b.



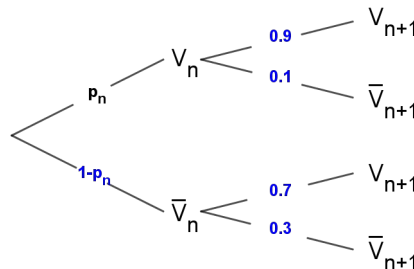
Théorème des probabilités totales.

$$p_3 = P(V_3) = P(V_2 \cap V_3) + P(\bar{V}_2 \cap V_3) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,7 = 0,81 + 0,07 = 0,88$$

$$p_3 = 0,88$$

1.c. $P_{V_3}(V_2) = \frac{P(V_2 \cap V_3)}{P(V_3)} = \frac{0,09}{0,88} = \frac{9}{88} \approx 0,10$ à 10^{-2} près.

2.



3. $p_{n+1} = P(V_{n+1}) = P(V_n \cap V_{n+1}) + P(\bar{V}_n \cap V_{n+1}) = p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,7$
 $p_{n+1} = 0,2 p_n + 0,7$

4.a. Pour les programmes 2 et 3 on obtient une liste de $(n+1)$ termes.

Le programme 1 permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) .

4.b. $p_4 = 0,2 \times p_3 + 0,7 = 0,2 \times 0,88 + 0,7 = 0,876$

$$p_5 = 0,2 \times p_4 + 0,7 = 0,2 \times 0,876 + 0,7 = 0,8752$$

Le résultat affiché pour $n=5$ est :

$$[1; 0,9; 0,88; 0,876; 0,8752]$$

5. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on ait :

$$p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$$

Initialisation

$$p_1 = 1 \text{ et } 0,125 \times 0,2^0 + 0,875 = 0,125 + 0,875 = 1$$

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel $n \geq 1$, on suppose que la propriété est vraie pour n c'est à dire $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$ et on doit démontrer que la propriété est vraie pour $n+1$ c'est à dire $p_{n+1} = 0,125 \times 0,2^n + 0,875$.

$$\text{Si } p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875 \text{ alors } p_{n+1} = 0,2 \times p_n + 0,7 = 0,2 \times (0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875) + 0,7$$

$$p_{n+1} = 0,125 \times 0,2^n + 0,2 \times 0,875 + 0,7 = 0,125 \times 0,2^n - 0,175 + 0,7 = 0,125 \times 0,2^n + 0,875$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on ait :

$$p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875.$$

6. $0 < 0,2 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^{n-1} = 0$
donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,875$.