

Exercice 2

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Deux équipes de footballeurs de 22 et 25 joueurs échangent une poignée de main à la fin du match. Chaque joueur d'une équipe serre une seule fois la main de chaque joueur de l'autre équipe.

Affirmation 1

47 poignées de mains ont été échangées.

2. Une course oppose 18 concurrents. On récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun.

Affirmation 2

Il y a 4896 possibilités de distribuer ces prix.

3. Une association organise une compétition de course de haies qui permettra d'établir un podium (le podium est constitué des trois meilleurs sportifs classés dans leur ordre d'arrivée).

Sept sportifs participent au tournoi. Jacques est l'un d'entre eux.

Affirmation 3

Il y a 90 podiums différents dont Jacques fait partie.

4. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires de même loi donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-2	-1	2	5
$P(X=x_i)$	0.1	0.4	0.3	0.2

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et on considère Y la variable aléatoire somme de ces deux variables aléatoires.

Affirmation 4

$P(X=4)=0,25$

5. Un nageur s'entraîne dans l'objectif de parcourir le 50 mètres nage libre en moins de 25 secondes. Au fil des entraînements, il s'avère que la probabilité qu'il y parvienne s'établit à 0,85.

Il effectue, sur une journée, 20 parcours chronométrés sur 50 mètres.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il nage cette distance en moins de 25 secondes lors de cette journée.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0,85$.

Affirmation 5

Sachant qu'il a atteint au moins 15 fois son objectif, une valeur approchée à 10^{-3} de la probabilité qu'il ait atteint au moins 18 fois en 0,434.

CORRECTION**1. Affirmation 1 : FAUSSE**Preuve

Chaque joueur des 22 de la première équipe échange une poignée de main avec chaque joueur des 25 joueurs de la deuxième équipe.

Il y a donc $22 \times 25 = 550$ poignées de main échangées.

2. Affirmation 2 : FAUSSEPreuve

Il suffit de choisir 3 concurrents distincts parmi les 18.

Il y a donc $\binom{18}{3}$ possibilités de distribuer ces prix.

$$\binom{18}{3} = \frac{18 \times 17 \times 16}{1 \times 2 \times 3} = 3 \times 17 \times 16 = 816$$

3. Affirmation 3 : VRAIEPreuve

Jacques est le premier pour avoir un podium il y a 6 possibilités pour le 2^{ème} et 5 possibilités pour le 3^{ème}. Il y a donc $6 \times 5 = 30$ podiums pour lesquels Jacques est le 1^{er}.

De même il y a 30 podiums pour lesquels Jacques est 2^{ème} et aussi pour lesquels Jacques est le 3^{ème}.

Il y a donc $3 \times 30 = 90$ possibilités de podiums dont Jacques fait partie.

4. Affirmation 4 : VRAIEPreuve

$$\{Y=4\} = \{ \{X_1=-1\} \cap \{X_2=5\} \} \cup \{ \{X_1=2\} \cap \{X_2=2\} \} \cup \{ \{X_1=5\} \cap \{X_2=-1\} \}$$

L'évènement $\{Y=4\}$ est l'union de trois évènements incompatibles deux à deux.

$$P(Y=4) = P(\{X_1=-1\} \cap \{X_2=5\}) + P(\{X_1=2\} \cap \{X_2=2\}) + P(\{X_1=5\} \cap \{X_2=-1\})$$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes donc :

$$P(\{X_1=-1\} \cap \{X_2=5\}) = P(X_1=-1) \times P(X_2=5) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$$

$$P(\{X_1=2\} \cap \{X_2=2\}) = P(X_1=2) \times P(X_2=2) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$$

$$P(\{X_1=5\} \cap \{X_2=-1\}) = P(X_1=5) \times P(X_2=-1) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$$

$$P(Y=4) = 0,08 + 0,09 + 0,08 = 0,25$$

5 Affirmation 5 : VRAIEPreuve

$$P_{X \geq 15}(X \leq 18) = \frac{P(\{X \geq 15\} \cap \{X \leq 18\})}{P(X \geq 15)} = \frac{P(X \geq 18)}{P(X \geq 15)}$$

En utilisant la calculatrice :

$$P(X \geq 18) \simeq 0,4049 \quad \text{et} \quad P(X \leq 15) \simeq 0,9327 \quad \text{et} \quad \frac{0,4049}{0,9327} \simeq 0,434$$