

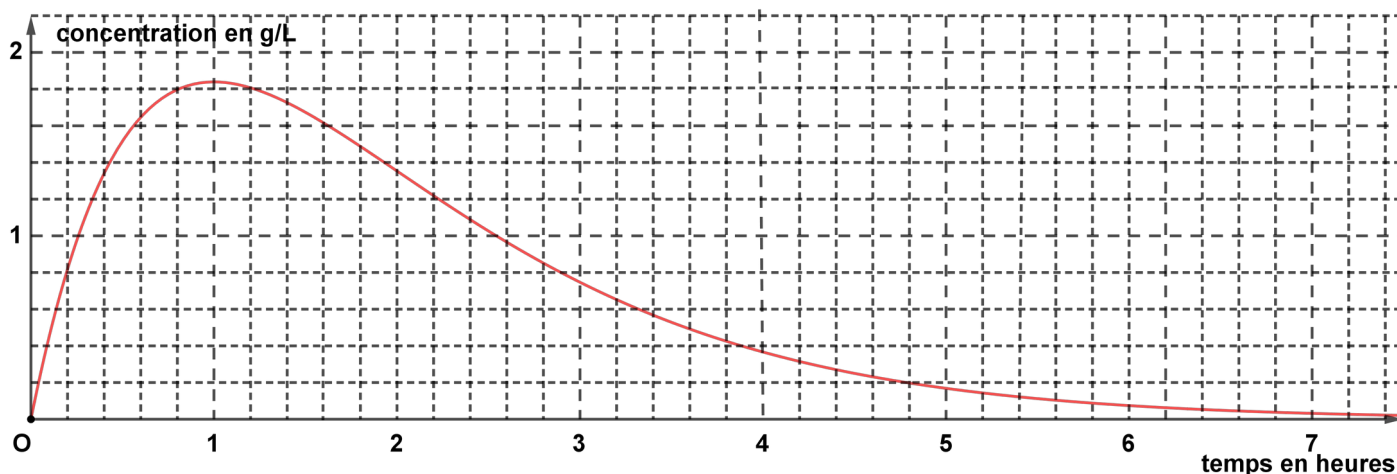
Exercice 3

6 points

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament intégré par une personne pour la première fois. Soit t son temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament.

On admet que la concentration de ce médicament dans le sang en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de variable t définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f . Avec la précision permise par le graphique, donner sans justification :

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geq 1$.
3. La convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.

Partie B : détermination de la fonction f

On considère l'équation différentielle (E): $y' + y = 5e^{-t}$ d'inconnue y , où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On admet que la fonction f est une solution de l'équation (E).

1. Résoudre l'équation (E') : $y' + y = 0$.
2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $u(t) = ate^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction u soit solution de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. La personne n'ayant pas pris de médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.
Déterminer l'expression de la fonction f .

Partie C : étude de la fonction f

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = 5e^{-t}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation complet.
3. Démontrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$;
On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près des réels t_1 et t_2 .

4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence.
Quelle est la durée en heures en minutes du risque de somnolence lors de la prise de ce médicament ?

Partie D : concentration moyenne

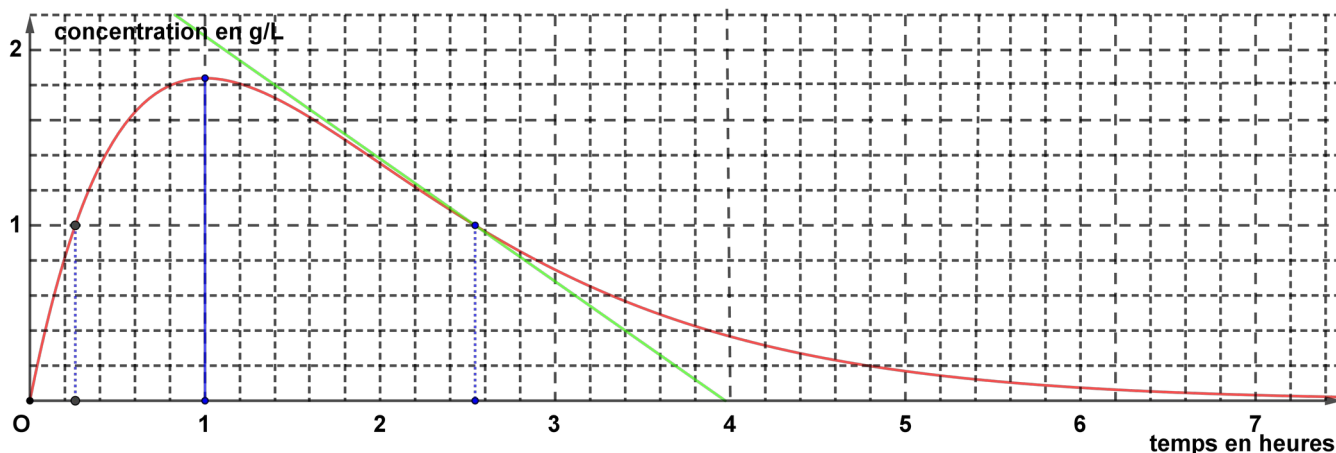
La concentration moyenne du médicament (en gramme par litre de sang) durant la première heure est donnée par : $T_n = \int_0^1 f(t) dt$ où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.

Calculer cette concentration moyenne.

On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près.

CORRECTION

Partie A : lectures graphiques



1. Au bout d'une heure, la concentration du médicament dans le sang est maximale.
2. $f(t) \geq 1$ $S=[0,25;2,55]$
Entre 15 min et 2h 33 min, la concentration de médicament dans le sang est supérieure ou égale à 1 g/L.
3. Le point de coordonnées (2,55;1) semble être un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Donc f est concave sur $[0;2,55]$ et convexe sur $[2,55;8]$.

Partie B : détermination de la fonction f

1. (E') : $y' + y = 0$
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + a y = 0$ (a constante réelle) sont les fonctions h_k définies sur $\mathbb{R}$ par $h_k(t) = k e^{-at}$ (k constante réelle).
Les solutions sur $[0; +\infty[$ de (E') sont les fonctions h_k définies sur $[0; +\infty[$ par $h_k(t) = k e^{-t}$ où k est une constante réelle.
2. u est définie sur $[0; +\infty[$ par $u(t) = a t e^{-t}$ avec a constante réelle
 u est dérivable sur $[0; +\infty[$
 $u'(t) = a e^{-t} + a t (-e^{-t})$ car $(e^{-t})' = -e^{-t}$
 $u'(t) = a e^{-t} - a t e^{-t}$
Pour $t \in [0; +\infty[$:
 $u'(t) + u(t) = 5 e^{-t} \Leftrightarrow a e^{-t} - a t e^{-t} - a t e^{-t} = 5 e^{-t} \Leftrightarrow a e^{-t} = 5 e^{-t} \Leftrightarrow a = 5$ car $e^{-t} \neq 0$.
La fonction u définie sur $[0; +\infty[$ par $u(t) = 5 t e^{-t}$ est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E).
3. Pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$.
 $y' + y = 5 e^{-t} \Leftrightarrow y' + y = u'(t) + u(t) \Leftrightarrow (y - u)'(t) + (y - u)(t) = 0 \Leftrightarrow y - u$ est solution de (E')
 $\Leftrightarrow y(t) - u(t) = k e^{-t}$ avec $k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(t) = 5 t e^{-t} + k e^{-t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
4. $f(t) = 5 t e^{-t} + k e^{-t}$ $f(0) = 0$
 $f(0) = 0 + k e^0 = 0 \Leftrightarrow k = 0$
 $t \in [0; +\infty[$ $f(t) = 5 t e^{-t}$

Partie C : étude de la fonction f

1. $t \in [0; +\infty[$ $f(t) = 5 t e^{-t} = 5 \frac{t}{e^t}$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. $t \in [0; +\infty[\quad f(t) = 5te^{-t}$

f est dérivable sur $[0; +\infty[$

$$f'(t) = 5e^{-t} + 5te^{-t} = 5(1-t)e^{-t}$$

Pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $e^{-t} > 0$ donc le signe de $f'(t)$ est le signe de $(1-t)$ sur $[0; +\infty[$.

$$1-t=0 \Leftrightarrow t=1$$

Si $0 \leq t < 1$ alors $1-t > 0$

Si $1 < t$ alors $1-t < 0$

$$f(1) = 5e^{-1} = \frac{5}{e} \approx 1,84$$

Tableau de variation de f

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{5}{e}$	0

3. f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\left[0; \frac{5}{e}\right]$, $1 \in \left[0; \frac{5}{e}\right]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(t)=1$ admet une unique solution t_1 appartenant à $[0; 1]$.

$$f(0,25) \approx 0,97 \text{ et } f(0,26) \approx 1,002 \text{ donc } t_1 = 0,26 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

f est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ à valeurs dans $\left[0; \frac{5}{e}\right]$, $1 \in \left[0; \frac{5}{e}\right]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(t)=1$ admet une unique solution t_2 appartenant à $[1; +\infty[$.

$$f(2,55) \approx 0,996 \text{ et } f(2,54) = 1,002 \text{ donc } t_2 = 2,54 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

4. $t_2 - t_1 = 2,54 - 0,26 = 2,28 \quad 0,28 \times 60 = 16,8 \approx 17$.

La durée du risque de somnolence lors de la prise de ce médicament est : 2h 17min.

Partie D : concentration moyenne

$$T_m = \int_0^1 5te^{-t} dt \quad \text{On effectue une intégration par parties.}$$

$$a(t) = 5t \quad a'(t) = 5$$

$$b'(t) = e^{-t} \quad b(t) = -e^{-t}$$

a et b sont dérivables sur $[0; 1]$ et a' et b' sont continues sur $[0; 1]$

$$\int_0^1 5te^{-t} dt = [-5te^{-t}]_0^1 - \int_0^1 (-5e^{-t}) dt$$

$$T_m = -5e^{-1} + 5[-e^{-t}]_0^1$$

$$T_m = -\frac{5}{e} - \frac{5}{e} + 5 = 5\left(1 - \frac{2}{e}\right) \approx 1,32$$