

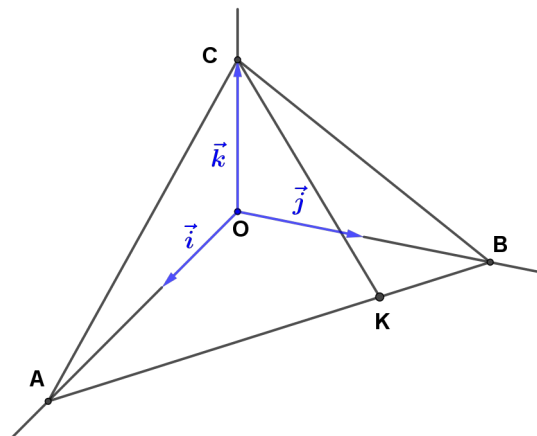
Exercice 4

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les points :

$$A(2\sqrt{3}; 0; 0) \quad B(0; 2; 0) \quad C(0; 0; 1) \quad K\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$$



1. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (CK) est :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = 1-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Soit $M(t)$ un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t .

Établir que $OM(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$

3. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = OM(t)$.

3.a. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3.b. En déduire la valeur de t pour laquelle f atteint son minimum.

4. En déduire que le point $H\left(\frac{\sqrt{3}}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK) .

5. Démontrer, à l'aide de l'outil produit scalaire, que le point H est l'orthocentre (point de concours des trois hauteurs d'un triangle) du triangle ABC .

6.a. Démontrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) .

6.b. En déduire une équation du plan (ABC) .

7. Calculer, en unité d'aire, l'aire du triangle ABC .

CORRECTION

$$1. \vec{CK} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad C(0;0;1)$$

(CK) est la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{CK}$.

Le point $M(x;y;z)$ appartient à la droite (CK) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\vec{CM} = t \cdot \vec{CK}$

$$\Leftrightarrow \vec{OM} = \vec{OC} + t \cdot \vec{CK} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = 1-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$2. M(t) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t; \frac{3}{2}t; 1-t \right)$$

$$OM^2(t) = \frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t^2 + 1 - 2t + t^2 = \frac{16}{4}t^2 - 2t + 1 = 4t^2 - 2t + 1$$

$$OM(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$$

$$3.a. f(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1} \quad f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}.$$

$$f'(t) = \frac{8t-2}{2\sqrt{4t^2-2t+1}} = \frac{4t-1}{\sqrt{4t^2-2t+1}}$$

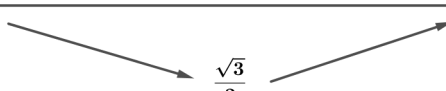
Le signe de $f'(t)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe $(4t-1)$.

$$4t-1=0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

$$4t-1>0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{4}$$

$$4t-1<0 \Leftrightarrow t < \frac{1}{4}$$

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau

t	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
f'(t)	-	0	+
f(t)			

$$3.b. \text{ Le minimum de } f \text{ est obtenu pour } t = \frac{1}{4}.$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{4 \times \frac{1}{16} - 2 \times \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$4. \text{ Le point H est le point de (CK) obtenu pour } t = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Donc } H\left(\frac{\sqrt{3}}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{4}\right) \text{ et } \vec{CH} = \frac{1}{4}\vec{CK} \text{ (important pour placer le point H sur le dessin).}$$

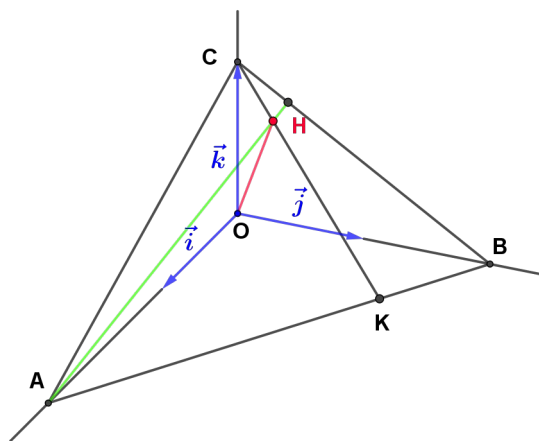
La distance minimale du point O à un point M de (CK) est obtenue pour le point H donc le point H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK).

Remarque

On ne sait pas si le point H appartient au plan (ABC) car on n'a pas démontré que le point K appartient à la droite (AB).

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AK} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AK} \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AK} = \frac{3}{4}\vec{AB} \text{ donc } K \in (AB)$$

et $H \in (ABC)$.



$$5. \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CK} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CK} = -2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{3}{2} + 0 \times (-1) = -3 + 3 + 0 = 0$$

donc (CK) est la hauteur du triangle ABC issue de C.

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{8} - 0 \\ \frac{3}{4} - 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -\frac{15\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \times \left(-\frac{15\sqrt{3}}{8}\right) - 2 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$$

(AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A.

Donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

6.a. H est le projeté orthogonal de O sur (CK), les droites (OH) et (CK) sont orthogonales.

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -\frac{15\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OH} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OH} = -\frac{15\sqrt{3}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = -\frac{45}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{16} = \frac{-45+9+36}{64} = 0$$

(OH) est orthogonale à (AH) donc (OH) est orthogonale à deux droites sécantes de (ABC)

donc (OH) est orthogonale au plan (ABC).

6.b. (ABC): $\frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{3}{8}y + \frac{3}{4}z + k = 0$ k est une constante réelle.

$$\text{Le point C appartient au plan (ABC) donc } \frac{\sqrt{3}}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 0 + \frac{3}{4} \times 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$$

$$(ABC): \frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{3}{8}y + \frac{3}{4}z - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow (ABC): \sqrt{3}x + 3y + 6z - 6 = 0.$$

$$7. \quad AB^2 = (-2\sqrt{3})^2 + 2^2 + 0^2 = 12 + 4 = 16 \quad AB = 4$$

$$CK^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1 = \frac{16}{4} = 4 \quad CK = 2$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times CK = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4 \text{ U. A.}$$