

Exercice 1

5 points

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près en cas de besoin.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle. En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.

En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.

Abel est au service.

On considère les événements suivants :

. S : « Abel réussit son premier service »

. G : « Abel gagne le point ».

1. Décrire l'évènement S puis traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(S \cap G)$.
3. Justifier que la probabilité de l'évènement G est égale à 0,695.
4. Abel a gagné le point. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi son premier service ?
5. Les événements S et G sont-ils indépendants ? Justifier.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.

1.a. Quelle est la loi suivie par X et quels sont ses paramètres ? Justifier.

1.b. Calculer $P(X \leq 18)$.

1.c. Quelle est la probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées ?

1.d. Calculer l'espérance de X.

2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,85.

On considère la variable aléatoire :

$$M_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}$$

2.a. Déterminer l'espérance et la variance de M_n .

2.b. Après avoir rappelé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$P(0,75 < M_n < 0,95) \geq 1 - \frac{12,75}{n}$$

2.c. En déduire un entier n tel que la moyenne de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0,75; 0,95[$ avec une probabilité supérieure à 0,9.

CORRECTION

Partie A

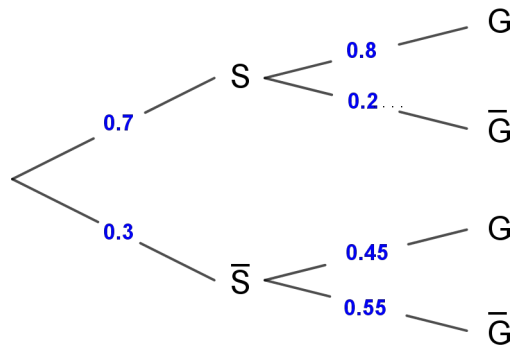
1. S : « Abel réussit son premier service ».

$$P(S)=0,7 \quad \text{donc} \quad P(\bar{S})=1-0,7=0,3$$

$$P_S(G)=0,8 \quad \text{donc} \quad P_S(\bar{G})=1-0,8=0,2$$

$$P_{\bar{S}}(G)=0,45 \quad \text{donc} \quad P_{\bar{S}}(\bar{G})=1-0,45=0,55$$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(S \cap G) = P(S) \times P_S(G) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$.

3. En utilisant la formule des probabilités totales :

$$P(G) = P(S \cap G) + P(\bar{S} \cap G) = 0,56 + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(G) = 0,56 + 0,3 \times 0,45$$

$$P(G) = 0,56 + 0,135 = 0,695$$

4. On nous demande de calculer $P_G(S)$.

$$P_G(S) = \frac{P(S \cap G)}{P(G)} \simeq 0,806$$

5. $P(S \cap G) = 0,56$

$$P(S) \times P(G) = 0,7 \times 0,695 = 0,4875 \neq 0,56$$

Les événements S et G ne sont pas indépendants.

Partie B

- 1.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

On choisit au hasard une balle de la production .

Succès S : « la balle est conforme », la probabilité de succès est : $P(S) = 0,85$.

On choisit au hasard 20 balles, le choix des 20 balles est considéré comme un tirage de 20 balles avec remise.

On effectue donc 20 épreuves de Bernoulli indépendantes.

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 20 épreuves, la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres : $n=20$ et $p=0,85$.

- 1.b. En utilisant la calculatrice :

$$P(X \leq 18) = 0,824$$

- 1.c. L'évènement : « au moins deux boules ne sont pas conformes parmi les 20 balles testées » est l'évènement : $\{X \leq 18\}$ sa probabilité est : 0,824 .

- 1.d. $E(X) = np = 20 \times 0,85 = 17$

2. On teste n balles successivement (n entier naturel non nul).

X est une variable aléatoire de loi de probabilité : la binomiale de paramètres 1 et $p=0,85$.

$$E(X) = 0,85 \quad \text{et} \quad V(X) = 0,85 \times 0,15 = 0,1275$$

$$2.a. E(M_n) = \sum_{i=1}^n E\left(\frac{X_i}{n}\right)$$

X_i suit la loi de probabilité de X .

$$E(X_i) = 0,85 \quad V(X_i) = 0,1275$$

$$E\left(\frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X_i) = \frac{0,85}{n} \quad E(M_n) = n \times \frac{0,85}{n} = 0,85$$

$$V\left(\frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X_i) = \frac{0,1275}{n^2} \quad \text{Les variables aléatoires } X_i \text{ sont indépendantes donc :}$$

$$V(M_n) = n \times V\left(\frac{X_i}{n}\right) = n \times \frac{0,1275}{n^2} = \frac{0,1275}{n}$$

2.b. Si X est une variable aléatoire d'espérance : $E(X)$ et t est un réel strictement positif l'inégalité

$$\text{de Bienaymé-Tchebychev donne } P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

$$\text{Pour } X = M_n \text{ et } t = 0,1 \text{ on obtient : } P(|M_n - 0,85| \geq 0,1) \leq \frac{0,1275}{0,1^2 \times n} = \frac{12,75}{n}$$

$$\text{L'évènement contraire de } |M_n - 0,85| \geq 0,1 \text{ est l'évènement } |M_n - 0,85| < 0,1 \Leftrightarrow$$

$$0,85 - 0,1 < M_n < 0,85 + 0,1 \Leftrightarrow 0,75 < M_n < 0,95.$$

$$P(0,75 < M_n < 0,95) = 1 - P(|M_n - 0,85| \geq 0,1) \geq 1 - \frac{12,75}{n}$$

2.c. Pour avoir $P(0,75 < M_n < 0,95) > 0,9$ il suffit de déterminer n tel que $1 - \frac{12,75}{n} > 0,9 \Leftrightarrow$

$$0,1 > \frac{12,75}{n} \Leftrightarrow n > \frac{12,75}{0,1} = 127,5 \quad n \text{ est un entier naturel donc on peut choisir } n = 128$$