

Exercice 2

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. On considère la droite Δ_1 de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

ainsi que la droite Δ_2 de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -4 + s \\ y = 2 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases} \text{ où } s \in \mathbb{R}.$$

- a. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.
- b. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.
- c. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont sécantes.

2. On considère la droite d de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R},$$

et le plan P d'équation cartésienne : $4x + 2y - z + 3 = 0$.

- a. La droite d est incluse dans le plan P .
- b. La droite d est parallèle strictement au plan P .
- c. La droite d est sécante au plan P .

3. On considère les points $A(3;2;1)$, $B(7;3;1)$, $C(-1;4;5)$ et $D(-3;3;5)$.

- a. Les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
- b. Les points A , B et C sont alignés.
- c. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

4. On considère les plans Q et Q' d'équation cartésienne respective $3x - 2y + z + 1 = 0$ et $4x + y - z + 3 = 0$.

- a. Le point $R(1;1;-2)$ appartient aux deux plans.
- b. Les deux plans sont orthogonaux.
- c. Les deux plans sont sécants avec pour intersection la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 + 7t \\ z = 7 + 11t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

CORRECTION

1. Proposition : c

Preuve non demandée

- Remarque préliminaire :

Il est simple d'étudier les propositions a et b pour la proposition c il faut un calcul.

- Δ_1 est la droite passant par $A_1(1;4;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Δ_2 est la droite passant par $A_2(-4;2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\frac{-3}{1} \neq \frac{1}{1}$ donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires et les droites Δ_1 et Δ_2 ne sont pas parallèles.

La proposition a est fausse.

- $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = -3 + 4 + 1 = 2 \neq 0$ donc les droites Δ_1 et Δ_2 ne sont pas orthogonales.

La proposition b est fausse.

Conséquence : la proposition c est vraie (car une et une seule des trois propositions est vraie).

- On peut vérifier ce résultat par le calcul.

Pour déterminer l'intersection des droites Δ_1 et Δ_2 on résout le système :

$$\begin{cases} 1-3t = -4+s \\ 4+2t = 2+2s \\ t = -1+s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s+3t = 5 & (1) \\ 2s-2t = 2 & (2) \\ s-t = 1 & (3) \end{cases}$$

Pour $\begin{cases} s+3t = 5 & (1) \\ s-t = 1 & (3) \end{cases}$ on obtient $4t = 4 \Leftrightarrow t = 1$ et $s = 2$.

On vérifie pour l'équation (2)

$$2 \times 2 - 2 \times 1 = 4 - 2 = 2$$

Les coordonnées du point d'intersection des droites Δ_1 et Δ_2 sont :

$$x = -2; y = 6; z = 1$$

2. Proposition : b

Preuve non demandée

d est la droite passant par $A(1;3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

P: $4x + 2y - z + 3 = 0$ $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

- $4 \times 1 + 2 \times 3 - 1 + 3 = 4 + 6 + 2 = 12 \neq 0$ donc le point A n'appartient pas au plan P et la droite d n'est pas incluse dans le plan P donc la proposition a est fausse.
- $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 4 - 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 4 - 2 - 2 = 0$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc la droite d est parallèle à P, comme d n'est pas incluse dans P alors la droite d est strictement parallèle au plan P et la proposition b est vraie.

3. Proposition : a

Preuve non demandée

A(3;2;1) B(7;3;1) C(-1;4;5) D(-3;3;5)

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\frac{4}{-4} \neq \frac{1}{2}$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés donc la proposition : b est fausse.
- $\frac{4}{-2} \neq \frac{1}{-1}$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et la proposition : c

est fausse.

. Conséquence :

la proposition : a est vraie .

4. Proposition : c

Preuve non demandée

$$Q: 3x - 2y + z + 1 = 0 \quad Q': 4x + y - z + 3 = 0$$

. $R(1;1;-2)$ $3 \times 1 - 2 \times 1 - 2 + 1 = 3 - 2 - 2 + 1 = 0$ donc $R \in Q$ $4 \times 1 + 1 + 2 + 3 = 4 + 1 + 2 + 3 = 10 \neq 0$
R n'appartient pas au plan Q' donc la proposition a est fausse.

. $\vec{N} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan Q ; $\vec{N}' \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan Q' .

$\vec{N} \cdot \vec{N}' = 3 \times 4 - 2 \times 1 + 1 \times (-1) = 12 - 2 - 1 = 9 \neq 0$ les vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{N}'$ ne sont pas orthogonaux et les plans Q et Q' ne sont pas orthogonaux et la proposition b est fausse.

. Conséquence :

la proposition c est vraie.