

Exercice 3

4 points

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = \ln(4) \\ v_{n+1} = \ln(-1 + 2e^{v_n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad w_n = -1 + e^{v_n}$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie et strictement positive.

1. Donner les valeurs exactes de v_1 et w_0 .

2.a. Une partie d'une feuille de calcul où figurent les indices et les termes des suites (v_n) et (w_n) est reproduite ci-dessous.

	A	B	C
1	n	v_n	w_n
2	0	1.38629436	3
3	1	1.94591015	6
4	2	2.56494936	12
5	3	3.21887582	24
6	4	3.8918203	48
7	5	4.57471098	96
8	6	5.26269019	192
9	7	5.95324333	384
10	8	6.64509097	768
11	9	7.33758774	1536
12	10	8.03040956	3072
13	11	8.72339402	6144
14	12	9.41645983	12288
15	13	10.1095663	24576
16	14	10.8026932	49152
17	15	11.4958302	98304
18	16	12.1889723	196608
19	17	12.8821169	393216

Parmi les trois formules ci-dessous, choisir la formule qui, saisie dans la cellule B3 puis recopiée vers le bas, permettra d'obtenir les valeurs de la suite (v_n) dans la colonne B.

Formule 1	LN(-1+2*EXP(B2))
Formule 2	=LN(-1+2*EXP(B2))
Formule 3	=LN(-1+2*EXP(A2))

2.b. Conjecturer le sens de variation de la suite (v_n) .

2.c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, valider votre conjecture concernant le sens de variation de la suite (v_n) .

3.a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

3.b. En déduire que pour tout entier naturel n , $v_n = \ln(1 + 3 \times 2^n)$.

3.c. Déterminer la limite de la suite (v_n) .

4. Justifier que l'algorithme suivant écrit en langage Python renvoie un résultat quel que soit le choix de la valeur de S .

```
from math import*
def seuil(S):
    v=ln(4)
    n=0
    while v<S:
        n=n+1
        v=ln(2*exp(v)-1)
    return(n)
```

CORRECTION

1. $v_1 = \ln(-1 + 2e^{\ln(4)}) = \ln(-1 + 2 \times 4) = \ln(7)$
 $w_0 = -1 + e^{\ln(4)} = -1 + 4 = 3$

2.a. Il faut choisir la formule 2.

2.b. La suite (v_n) est croissante.

2.c. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , on ait :

$$v_{n+1} \geq v_n$$

Initialisation

$$v_0 = \ln(4) \quad v_1 = \ln(7).$$

La fonction $\ln$ est croissante sur $]0; +\infty[$

$$4 \leq 7 \text{ donc } \ln(4) \leq \ln(7) \Leftrightarrow v_0 \leq v_1$$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $v_{n+1} \geq v_n$ et on doit démontrer que $v_{n+2} \geq v_{n+1}$.

Si $v_{n+1} \geq v_n$ alors $e^{v_{n+1}} \geq e^{v_n}$ (car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$)

et $2e^{v_{n+1}} - 1 \geq 2e^{v_n} - 1 > 1$ donc $\ln(2e^{v_{n+1}} - 1) \geq \ln(2e^{v_n} - 1)$ soit $v_{n+2} \geq v_{n+1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n on a $v_{n+1} \geq v_n$.

La suite (v_n) est donc croissante.

3.a. Pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = -1 + e^{v_{n+1}} = -1 + e^{\ln(-1 + 2e^{v_n})} = -1 + (-1 + 2e^{v_n}) = 2(-1 + e^{v_n}) = 2w_n$$

(w_n) est une suite géométrique de raison 2.

3.b. $w_0 = 3$ donc pour tout entier naturel n $w_n = 3 \times 2^n$.

$$w_n = 3 \times 2^n = -1 + e^{v_n} \Leftrightarrow e^{v_n} = 1 + 3 \times 2^n \Leftrightarrow v_n = \ln(1 + 3 \times 2^n)$$

3.c. $2 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

4. Si $S \leq \ln(4)$ alors aucun terme de la suite (v_n) est strictement inférieur à S

[l'algorithme renvoie 0.](#)

. Si $\ln(4) < S$ comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, il existe des valeurs de n pour lesquelles $S < v_n$ et la suite

(v_n) est croissante, [l'algorithme renvoie alors le plus petit entier naturel \$n\$ tel que \$v_n > S\$.](#)

Par exemple si $S=11$ alors l'algorithme renvoie 15.