

Exercice 4

6 points

Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30 ; -29 ; -28 ; \dots -1 ; 1 ; \dots 28 ; 29 ; 30\}$. Il comporte 60 éléments.

On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c .

- Combien de couples $(a;c)$ différents peut-on obtenir ?
On considère l'évènement M : « l'équation $ax^2+2x+2=0$ possède deux solutions réelles distinctes », où a et c sont les entiers relatifs précédemment choisis.
- Montrer que l'évènement a lieu si et seulement si $ac < 1$.
- Expliquer pourquoi l'évènement contraire $\bar{M}$ comporte 1740 issues.
- Quelle est la probabilité de M ? On arrondira le résultat à 10^{-2} .

Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

(E) : $y' + 10y = (30x^2 + 22x - 8)e^{-5x+1}$ avec $x \in \mathbb{R}$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' + 10y = 0$.
- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1}$.
On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la fonction dérivée de f .
Justifier que f est une solution particulière de (E).
- Donner l'expression de toutes les solutions de (E).

Partie C : étude de fonction

On propose d'étudier dans cette partie la fonction f rencontrée à la partie B question 2.

On rappelle que, pour tout réel x , $f(x) = (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f . On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

- On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
- En utilisant la partie A, montrer que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points (les coordonnées de ces points ne sont pas attendues).
- En utilisant les parties A et B, montrer que $\mathcal{C}_f$ possède deux tangentes horizontales.
- Dresser le tableau de variation complet de la fonction f .
- Déterminer en justifiant le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 1$.
- Pour tout réel m strictement supérieur à 0,2 cm, on définit I_m par $I_m = \int_{0,2}^m f(x) dx$.
- a. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125}\right)e^{-5x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- b. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle $I_m = 0$?
Interpréter graphiquement le résultat.

CORRECTION

Partie A : dénombrement

1. Pour a il y a 60 tirages possibles, on effectue des tirages sans remise, pour chaque tirage de a il y a 59 tirages possibles pour c .

Il y a donc $60 \times 59 = 3540$ couples $(a; c)$ différents.

2. a étant différent de zéro, l'équation $ax^2 + 2x + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes si et seulement si $\Delta = 2^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow 4 > ac \Leftrightarrow ac < 1$

3. $\bar{M}$ est l'ensemble des issues telles que $ac \geq 1$.

Remarque : on ne peut pas obtenir 1 pour le produit ac (car si $a=1$ alors $c \neq 1$ et si $a=-1$ alors $c \neq -1$ si $a \neq 1$ et $a \neq -1$ alors $|ac| > 1$).

Il y a 60 possibilités de tirages pour a et pour avoir $ac \geq 1$ il faut et il suffit d'obtenir un nombre de même signe que a et différent de a , il y a donc 29 possibilités.

Le nombre d'issues $(a; c)$ telles que $ac \geq 1$ est égal à $60 \times 29 = 1740$.

$$4. P(\bar{M}) = \frac{1740}{3540} = \frac{87}{177}$$

$$P(M) = 1 - \frac{87}{177} = \frac{90}{177} \simeq 0,51 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Partie B : équation différentielle

1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ est l'ensemble des fonctions h_k définies sur $\mathbb{R}$ par $h_k(x) = k e^{-10x}$ avec k constante réelle.

2. Pour tout nombre réel x :

$$(6x^2 + 2x - 2)' = 12x + 2 \quad (e^{-5x+1})' = -5e^{-5x+1}$$

$$f'(x) = (12x + 2)e^{-5x+1} + (6x^2 + 2x - 2)(-5e^{-5x+1}) = (12x + 2 - 30x^2 - 10x + 10)e^{-5x+1} = (-30x^2 + 2x + 12)e^{-5x+1}$$

$$f'(x) + 10f(x) = (-30x^2 + 2x + 12)e^{-5x+1} + (60x^2 + 20x - 20)e^{-5x+1} = (30x^2 + 22x - 8)e^{-5x+1}$$

donc f est une solution particulière de (E).

3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions g_k définies sur $\mathbb{R}$ par $g_k(x) = k e^{-10x} + (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1}$.

Partie C : étude de fonction

1. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 2x - 2) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x + 1) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-5x+1} = +\infty$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

2. Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 2x - 2 = 0 \text{ (car pour tout réel } x, e^{-5x+1} > 0)$$

On considère la partie A $ac = -12 < 1$ donc l'équation admet deux solutions distinctes.

On effectue le calcul des solutions (non demandé mais intéressant pour l'interprétation graphique finale).

$$\Delta = 4 + 48 = 52 = 4 \times 13$$

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{13}}{12} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6} \simeq -0,768$$

$$x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{13}}{12} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \simeq 0,434$$

3. On détermine les solutions de l'équation $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (-30x^2 + 2x + 12)e^{-5x+1} = 0 \Leftrightarrow -30x^2 + 2x + 12 = 0$$

$$a = -30 \quad c = 12 \quad ac = -30 \times 12 = -360 < 1 \text{ donc l'équation admet deux solutions distinctes.}$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux tangentes horizontales.

4. On détermine le signe de $f'(x)$ qui est égal au signe de $-30x^2+2x+12$ (car $e^{-5x+1} > 0$).

$$\Delta = 4 + 4 \times 30 \times 12 = 4 + 1440 = 1444 = 38^2$$

$$x_3 = \frac{-2-38}{-60} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \quad x_4 = \frac{-2+38}{-60} = -\frac{36}{60} = -\frac{6}{10} = -0,6$$

Le coefficient de x^2 est négatif donc :

si $x < -0,6$ alors $f'(x) < 0$; si $-0,6 < x < \frac{2}{3}$ alors $f'(x) > 0$; si $\frac{2}{3} < x$ alors $f'(x) < 0$.

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	x_1	$-0,6$	x_2	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$		m		M	0

$$m = f(-0,6) \simeq -56,4 \quad M = f\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 0,194$$

5. Sur l'intervalle $[-0,6; +\infty[$, la fonction f admet un maximum $M < 1$, donc l'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solution sur $[-0,6; +\infty[$.

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; -0,6]$ à valeurs dans $[m; +\infty[$, $1 \in [m; +\infty[$ le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe α unique tel que $f(\alpha) = 1$ appartenant à $]-\infty; -0,6]$.

L'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique.

6.a. Pour tout réel x :

$$\left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125}\right)' = -\frac{12}{5}x - \frac{22}{25} \quad (e^{-5x+1})' = -5e^{-5x+1}$$

$$F'(x) = \left(-\frac{12}{5}x - \frac{22}{25}\right)e^{-5x+1} + \left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125}\right)(-5e^{-5x+1})$$

$$F'(x) = \left(-\frac{12}{5}x - \frac{22}{25} + 6x^2 + \frac{22}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{-5x+1}$$

$$F'(x) = \left(6x^2 + \frac{10}{5}x - \frac{50}{25}\right)e^{-5x+1} = (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1} = f(x)$$

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6.b. $I_m = \int_{0,2}^m f(x) dx = [F(x)]_{0,2}^m$

$$F(0,2) = \left(-\frac{6}{5} \times 0,04 - \frac{22}{25} \times 0,2 + \frac{28}{125}\right)e^0 = \left(-\frac{6}{125} - \frac{22}{125} + \frac{28}{125}\right) = 0$$

$$I_m = F(m)$$

$$I_m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125} = 0 \end{cases}$$

On obtient : $-150m^2 - 110m + 28 = 0$

$$\Delta = 110^2 + 4 \times 150 \times 28 = 28900 = 170^2$$

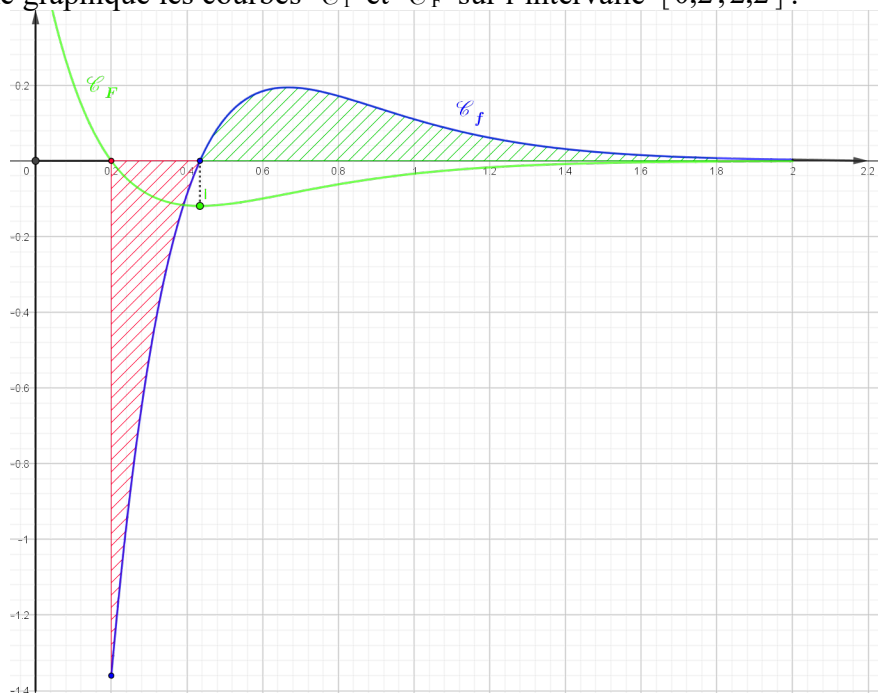
$$m_1 = \frac{110-170}{-300} = \frac{-60}{-300} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$m_2 = \frac{110+170}{-300} = -\frac{280}{300} = -\frac{14}{15} < 0,2$$

Il n'existe pas de valeur de m strictement supérieure à $0,2$ telle que $I_m = 0$.

Interprétation graphique

On trace sur un même graphique les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_F$ sur l'intervalle $[0,2;2,2]$.



On constate que $F(0,2)=0$ et que si $m>0,2$ alors $F(m)<0$.

La courbe $\mathcal{C}_F$ ne coupe pas l'axe des abscisses sur $]0,2;+\infty[$.

On conjecture $\lim_{m \rightarrow +\infty} F(m)=0$.

Si on considère $x_2 \simeq 0,43$ l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses.

f est négative ou nulle sur $[0;x_2]$ donc $\int_{0,2}^{x_2} f(x)dx$ est l'opposé de l'aire en U.A. de la partie de plan hachurée en rouge cette intégrale est égale à $F(x_2) \simeq -0,1191$.

Si $m>x_2$ alors $\int_{0,2}^m f(x)dx = \int_{0,2}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^m f(x)dx$

Pour $m=1,8$ $\int_{x_2}^m f(x)dx$ est l'aire en U.A. hachurée en vert sur le dessin.

Comme $\lim_{m \rightarrow +\infty} F(m)=0$ l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[x_2;+\infty[$ est égale à l'aire hachurée en rouge.