

Exercice 1

5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère :

- α un réel quelconque ;
- les points $A(1;1;0)$, $B(2;1;0)$ et $C(\alpha;3;\alpha)$;
- (d) la droite dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 :

Pour toutes les valeurs de α , les points A, B et C définissent un plan et un vecteur normal à ce plan est $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Affirmation 2 :

Il existe exactement une valeur de α telle que les droites (AC) et (d) soient parallèles.

Affirmation 3 :

Une mesure de l'angle \widehat{OAB} est 135° .

Affirmation 4 :

Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point $H(1;2;2)$.

Affirmation 5 :

La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en deux points distincts.

On rappelle que la sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance r de Ω .

CORRECTION

Affirmation 1 : FAUSSE

Preuve

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C définissent un plan.

$$\vec{AB} \cdot \vec{j} = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0 \quad \vec{AC} \cdot \vec{j} = (\alpha - 1) \times 0 + 3 \times 1 + \alpha \times 0 = 3 \neq 0$$

\vec{j} n'est pas un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : FAUSSE

Preuve

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de (d).}$$

(AC) et (d) sont parallèles si et seulement si \vec{AC} et \vec{u} sont colinéaires c'est à dire si et seulement s'il existe

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \vec{AC} = \lambda \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = \lambda & (1) \\ 3 = 2\lambda & (2) \\ \alpha = -\lambda & (3) \end{cases}$$

$$(2) \lambda = \frac{3}{2} = 1,5 \quad (3) \alpha = -1,5 \quad (1) -1,5 - 1 = -2,5 \neq 1,5$$

Pour toute valeur de α (AC) et (d) ne sont pas parallèles.

Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

$$\vec{AO} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AO} \cdot \vec{AB} = -1 \times 1 - 1 \times 1 + 0 \times 0 = -1$$

$$AO^2 = (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 2 \Leftrightarrow AO = \sqrt{2} \quad AB^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 \Leftrightarrow AB = 1$$

$$\vec{AO} \cdot \vec{AB} = -1 = AO \times AB \times \cos(\widehat{OAB}) = \sqrt{2} \times 1 \times \cos(\widehat{OAB})$$

$$\text{donc } \cos(\widehat{OAB}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(135^\circ) \quad \widehat{OAB} = 135^\circ$$

Affirmation 4 : FAUSSE

Preuve

H est le projeté orthogonal de A sur (d) si et seulement si $H \in (d)$ et $\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$.

$$H(1; 2; 2) \text{ on résout : } \begin{cases} 1 = 1 + t \\ 2 = 2t \\ 2 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \text{ donc } H \notin (d)$$

Affirmation 5 : VRAIE

Preuve

$M(x; y; z)$ appartient à la sphère de centre o et de rayon 1 si et seulement si $OM = 1 \Leftrightarrow OM^2 = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

M est un point d'intersection de la sphère et de la droite (d) si et seulement si : $(1+t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow 1 + t^2 + 2t + 4t^2 + t^2 = 1 \Leftrightarrow 6t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow 2t(3t + 1) = 0 \Leftrightarrow \left(t = 0 \text{ ou } t = -\frac{1}{3} \right)$$

Les deux points d'intersection de la sphère de centre O et de rayon 1 et de la droite (d) sont : $N_1(1; 0; 0)$

et $N_2\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.