Exercice 2 5 points

Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation.
Dans cet exercice, on l'intéresse à deux tests effectués par l'entreprise de jouets : un test *de fabrication* et un test *de sécurité.*
À la suite d'un grand nombre de vérifications, l'entreprise affirme que :
. 95 % des jouets réussissent le test de fabrication ;
. Parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98 % réussissent le test de sécurité ;
. 1 % des jouets ne réussissent aucun des tests.
On choisit au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :
. F l'évènement : « le jouet réussit le test de fabrication » ;
. S l'évènement : « le jouet réussit le test de sécurité ».

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner les probabilités $P(F)$ et $P_F(S)$.
2.a. Construire un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles de l'énoncé.
2.b. Montrer que $P_{\bar{F}}(\bar{S})=0,2$.
3. Calculer la probabilité que le jouet réussisse les deux tests.
4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut $0,97$ arrondi au centième.
5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication ? Donner une valeur approchée du résultat au centième.

Partie B

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.
On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à $0,95$.
Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication.
On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p=0,95$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n.

2. Dans cette question, on pose $n=150$.
2.a. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(S_{150}=145)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2.b. Déterminer la probabilité qu'au moins 94 % des jouets de ce lot le réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.
Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n=\frac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés.
On note $E(F_n)$ l'espérance et $V(F_n)$ la variance de la variable aléatoire F_n.
3.a. Montrer que $E(F_n)=0,95$ et que $V(F_n)=\frac{0,0475}{n}$.
3.b. On s'intéresse à l'évènement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93 % et 97 % ».
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de joueurs à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à 0,96.

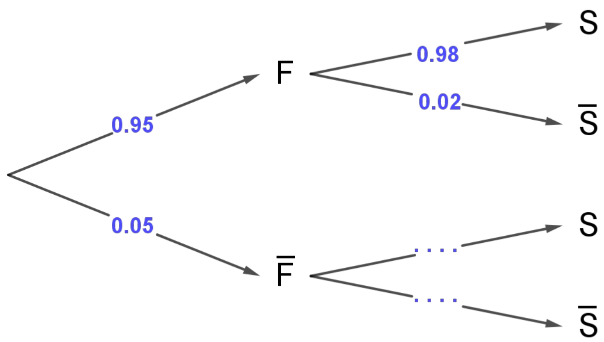
CORRECTION

Partie A

1. 95 % des jouets réussissent le test de fabrication donc $P(F)=0{,}95$.
Parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98 % réussissent le test de sécurité donc $P_F(S)=0{,}98$.

2.a. $P(\bar{F})=1-P(F)=1-0{,}95=0{,}05$
$P_F(\bar{S})=1-P_F(S)=1-0{,}98=0{,}02$

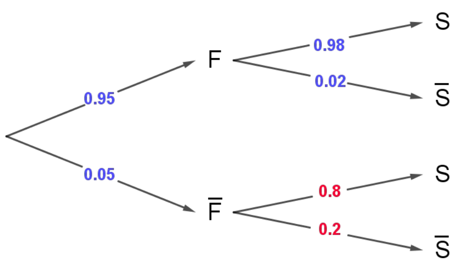
. On donne l'arbre pondéré illustrant la situation des données disponibles dans l'énoncé :



2.b. 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests donc $P(\bar{F}\cap\bar{S})=0{,}01$.

Or $P(\bar{F}\cap\bar{S})=P(\bar{F})\times P_{\bar{F}}(\bar{S}) \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}01=0{,}05\times P_{\bar{F}}(\bar{S}) \quad\Leftrightarrow\quad P_{\bar{F}}(\bar{S})=\dfrac{0{,}01}{0{,}05}=0{,}2$.

On peut alors compléter l'arbre pondéré.
$P_{\bar{F}}(S)=1-P_{\bar{F}}(\bar{S})=1-0{,}2=0{,}8$



3. $P(F\cap S)=P(F)\times P_F(S)=0{,}95\times 0{,}98=0{,}931$.

4. En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :
$P(S)=P(F\cap S)+P(\bar{F}\cap S)$
$P(F\cap S)=0{,}931$ et $P(\bar{F}\cap S)=P(\bar{F})\times P_{\bar{F}}(S)=0{,}05\times 0{,}8=0{,}04$
$P(S)=0{,}931+0{,}04=0{,}971$
$P(S)=0{,}97$ au centième près.

5. On doit calculer $P_S(F)$.
$P_S(F)=P(S\cap F)/P(S)=\dfrac{0{,}931}{0{,}971}\simeq 09588$ donc $P_S(F)=0{,}96$ au centième près.

Partie B

1. S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p=0{,}95$, donc :
$E(S_n)=np=0{,}95\,n$
$q=1-p=1-0{,}95=0{,}05$
$V(S_n)=npq=0{,}95\times 0{,}05\,n=0{,}0475\,n$.

2. n=150

2.a $P(S_{150}=145)=\binom{150}{145}\times 0{,}95^{145}\times 0{,}05^{150-145}$.

$P(S_{150}=145)=0{,}109$ à 10^{-3} près.

Dans tout lot de 150 jouets choisis au hasard, il y a 10,9 % de chance d'avoir exactement 145 jouets ayant réussis le contrôle de sécurité.

2.b. $150\times\frac{94}{100}=141$ donc 94 % des 150 jouets correspond à 141.

La probabilité qu'au moins 94 % des jouets réussissent le test de fabrication est $P(S_{150}\geqslant 141)$.

En utilisant la calculatrice : $P(S_{150}\geqslant 141)=0{,}781$ à 10^{-3} près.

3.a. $E(F_n)=E\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n}\times E(S_n)=\frac{1}{n}\times np=p=0{,}95$ $E(F_n)=0{,}95$

$V(F_n)=V\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\times V(S_n)=\frac{1}{n^2}\times npq=\frac{pq}{n}=\frac{0{,}0475}{n}$ $V(F_n)=\frac{0{,}0475}{n}$.

3.b. $P(I)=P(0{,}93<F_n<0{,}97)<0{,}02$

$E(F_n)=0{,}95$ donc $P(I)=P(|F_n-E(F_n)|<0{,}02)$

$P(\bar{I})=P(|F_n-E(F_n)|)\geqslant 0{,}02$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$P(|F_n-E(F_n)|\geqslant 0{,}02)\leqslant\frac{V(F_n)}{0{,}02^2}=\frac{0{,}0475}{0{,}0004\,n}=\frac{475}{4\,n}$

$P(I)\geqslant 0{,}96 \Leftrightarrow P(\bar{I})\leqslant 0{,}04$

Pour que $P(\bar{I})\leqslant 0{,}04$ il suffit que $\frac{475}{4\,n}\leqslant 0{,}04$.

$\frac{475}{4\,n}\leqslant 0{,}04 \Leftrightarrow 475\leqslant 0{,}16\,n \Leftrightarrow \frac{475}{0{,}16}\leqslant n$

$\frac{475}{4\,n}\simeq 2368{,}75$ n est un entier naturel, on choisit $n=2369$.

Si $n\geqslant 2369$ alors $P(I)\geqslant 0{,}96$.