Exercice 3 — 5 points

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.
On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.
On a $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = 2 + 0{,}8\,u_n$.

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans dans organisme du patient est strictement supérieure à 9 ml.

1. Calculer la valeur u_2 .

2. Montrer par récurrence que : $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$ pour tout entier naturel strictement positif.

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ?
Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 ml. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.
On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par :

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2 .

2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif, $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n$

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

4. On donne la fonction mystère suivante, écrite en langage Python :

```
def mystere(k):
  n=1
  s=2
  while s<k:
    n=n+1
    s=10-40/n+(40*0.8**n)/n
  return n
```

Dans le contexte de l'énoncé que représente la valeur renvoyée par la saisie mystere(9) ?

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à10.

CORRECTION

Partie A

1. $u_1=2$ et pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1}=2+0,8u_n$.
$u_2=2+0,8\times u_1=2+0,8\times 2=3,6$.

.

2. On démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif, on a : $u_n=10-8\times 0,8^{n-1}$.

Initialisation

Pour $n=1$: $u_1=2$ et $10-8\times 0,8^0=10-8\times 1=2$

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, on suppose que : $u_n=10-8\times 0,8^{n-1}$ et on doit démontrer que : $u_{n+1}=10-8\times 0,8^{(n+1)-1}=10-8\times 0,8^n$

Or $u_{n+1}=2+0,8\times u_n=2+0,8\times(10-8\times 0,8^{n-1})=2+8-8\times 0,8^n=10-8\times 0,8^n$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour entier strictement positif n, on a :
$u_n=10-8\times 0,8^{n-1}$.

3. $0\leqslant 0,8<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0,8^{n-1}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n=10$.

La quantité de médicament dans l'organisme du patient, après de nombreuses prises de médicament immédiatement après la dernière sera très voisine de 10 ml.

4. Pour tout entier naturel n, strictement positif, $8\times 0,8^{n-1}>0$ donc $10-8\times 0,8^N<10$ et l'inéquation : $u_N>10$ n'admet pas de solution.

La quantité de médicament dans l'organisme du patient sera toujours strictement inférieure à 10 ml.

5. $u_n>9 \Leftrightarrow 10-8\times 0,8^{n-1}>9 \Leftrightarrow 1>8\times 0,8^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{8}=0,125>0,8^{n-1}$

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\Leftrightarrow \ln(0,125)>\ln(0,8^{n-1}) \Leftrightarrow \ln(0,125)>(n-1)\ln(0,8)$.

$0<0,8<1$ donc $\ln(0,8)<0$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,125)}{\ln(0,8)}<n-1 \Leftrightarrow \frac{\ln(0,1225)}{\ln(0,8)}+1<n$;

En utilisant la calculatrice : $\frac{\ln(0,125)}{\ln(0,8)}\simeq 9,32$ et n est un entier naturel.

$\Leftrightarrow 10+1\leqslant n \Leftrightarrow 11\leqslant n$.

Immédiatement après la $11^{\text{ème}}$ prise de médicament la quantité de médicament daus l'organisme du patient sera pour la première fois supérieure à 9 ml.

Partie B

1. Pour tout entier naturel strictement positif n : $S_n=\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}$.

$S_2=\frac{u_1+u_2}{2}=\frac{2+3,6}{2}=2,8$.

2. $u_1+u_2+\ldots+u_n=10-8\times 0,8^0+10-8\times 0,8^1+\ldots+10-8\times 0,8^{n-1}=10n-8\times(0,8^0+0,8^1+\ldots+0,8^{n-1})$

$0,8^0+0,8^1+\ldots+0,8^{n-1}$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 0,8.

$0{,}8^0+0{,}8^1+\dots+0{,}8^{n-1}=\frac{1-0{,}8^n}{1-0{,}8}=\frac{1-0{,}8^n}{0{,}2}=5-5\times 0{,}8^n$

$u_1+u_2+\dots+u_n=10n-8\times(5-5\times 0{,}8^n)=10n-40+40\times 0{,}8^n$

3. $S_n=\frac{10n-40+40\times 0{,}8^n}{n}=10-\frac{40-40\times 0{,}8^n}{n}$

$0<0{,}8<1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n=0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(40-40\times 0{,}8^n)=40$ et $\lim\limits_{n\to n}\frac{40-40\times 0{,}8^n}{n}=0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=10$.

4. La valeur renvoyée par mystere(9) est la plus petite valeur de n telle que $S_n\geqslant 9$.

5. (S_n) est une suite croissante, pour répondre à la question posée, il suffit de vérifier que $S_{10}<9$.

$S_{10}=\frac{100-40+40\times 0{,}8^{10}}{10}=6+4\times 0{,}8^{10}\simeq 6{,}429$ à 10^{-3} près.

$S_{10}<9$.

Remarque :
En exécutant le programme Python ou en utilisant un tableur on obtient :
$S_{39}=8{,}9745$ à 10^{-4} près et $S_{40}=9{,}0001$ à 10^{-4} près.
La valeur renvoyée par mystere(9) est : 40.