Exercice 4 5points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=e^{\sqrt{x}}$.
1.a. Montrer que $g'(x)=f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.
1.b. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que : $f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$.

2.a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2.b. Interpréter graphiquement ce résultat.

3.a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3.b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant intervenir les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3.c. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.

4. On pose $I=\int_1^2 f(x)\,dx$.
4.a. Calculer I.
4.b. Interpréter graphiquement le résultat.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que :
$$f''(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}(x-3\sqrt{x}+3)}{8x^2\sqrt{x}}$$
5.a. En posant $X=\sqrt{x}$, montrer que $x-3\sqrt{x}+3>0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$.
5.b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

CORRECTION

1.a. Pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $g(x)=e^{\sqrt{x}}$.

$(e^{u(x)})'=u'(x)e^{u(x)}$ $\quad(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}=f(x)$.

1.b. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$u(x)=e^{\sqrt{x}}$ $\quad u'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ $\quad v(x)=2\sqrt{x}$ $\quad v'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$u'(x)v(x)-u(x)v'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\times 2\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$ $\quad v^2(x)=4x$

donc $f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$.

2.a. x est un nombre réel strictement positif.

$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}e^{\sqrt{x}}=e^0=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty$ on obtient $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.

2.b. La droite d'équation $x=0$ et une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

3.a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

3.b. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$.

$e^{\sqrt{x}}>0$ et $\frac{1}{4x\sqrt{x}}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $(\sqrt{x}-1)$.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Si $1<x$ alors $\sqrt{1}<\sqrt{x}$ $\Leftrightarrow$ $0<\sqrt{x}-1$

Si $0<x<1$ alors $\sqrt{x}<\sqrt{1}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x}-1<0$

Tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
f '(x)	‖	$-$	0	$+$	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	$\frac{e}{2}$	↗	$+\infty$

$f(1)=\frac{e}{2}\simeq 1{,}359$.

3.c. f est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et $f(1)<2$ donc l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$.

En utilisant la calculatrice par balayage (ou par dichotomie) on obtient :

$\alpha=4{,}6$ à 10^{-1} près.

4.a. Pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $g'(x)=f(x)$.

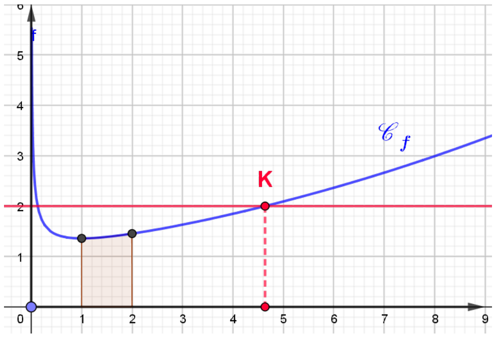
Donc g est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

$I=\int_1^2 f(x)\,dx=[g(x)]_1^2=[e^{\sqrt{x}}]_1^2=e^{\sqrt{2}}-e^1=e^{\sqrt{2}}-e$.

4.b. Pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)\geqslant f(1)>0$.

f est continue et positive sur [1;2] donc I est l'aire en unité d'aire de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$.

On donne une figure non demandée



5.a. $\begin{cases} x>0 \\ x-3\sqrt{x}+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\sqrt{x} \\ X^2-3X+3>0 \end{cases}$

$T(X)=X^2-3X+3$ $\Delta=9-4\times3\times1=-3<0$ donc pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$

$x-3\sqrt{x}+3>0$.

5.b. Le signe de $f''(x)$ est le signe de $x-3\sqrt{x}+3$ donc pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$

$f''(x)>0$ donc f est convexe sur $]0;+\infty[$.

