Exercice 1 *5 points*

Toutes les probabilités, sauf indication contraire, seront arrondies à 10^{-3} dans cet exercice.
« Le virus chikungunya, transmis à l'homme par la piqûre du moustique tigre provoque chez les patients des douleurs articulaires aiguës qui peuvent être persistantes. En 2005 une importante épidémie de chikungunya a touché les îles de l'Océan Indien : Étude d'un exemple et notamment l'île de la réunion, avec plusieurs centaines de milliers de cas déclarés. En 2007, la maladie a fait son apparition en Europe, puis fin 2013, aux Antilles et a atteint le continent américain en 2014 ».

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus.
Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :
- la probabilité qu'un individu atteint par le virus ait un test positif est de 0,999 ;
- la probabilité qu'un individu non atteint par le virus ait un test positif est de 0,005.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population cible.
Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :
- M l'évènement : « l'individu choisi est atteint du chikungunya ».
- T l'évènement : « le test de l'individu est positif ».

On considère que le test est *fiable* lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus est supérieure à 0,95.

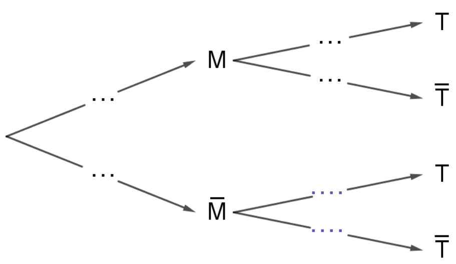
Partie A : Étude d'un exemple

1. Donner les probabilités $P_M(T)$ et $P_{\bar{M}}(T)$

« En mars 2005, l'épidémie s'est propagée rapidement dans l'île de La Réunion, avec une flambée importante entre fin avril et début juin puis une persistance de la transmission vitale durant l'hiver austral. Au total, 270000 personnes ont été infectées pour une population totale de 750000 individus ».
Fin 2005, le laboratoire a effectué un test de dépistage massif de la population de l'île de La Réunion.
Dans cette partie , la cible est donc la population de l'île de La Réunion.

2. Donner la valeur exacte de $P(M)$.

3. Recopier et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous.



4. Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par le virus et ait un test positif.

5. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.

6. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus.

7. Peut-on estimer que ce test est fiable ? Argumenter.

Partie B : Dépistage sur une population cible

Dans cette partie, on note p la proportion de personnes atteintes par le virus du chikungunya dans une population cible.
On cherche ici à tester la fiabilité du test du laboratoire en fonction de p.

1. Recopier, en l'adaptant, l'arbre pondéré de la question A3 en tenant compte des nouvelles données.

2. Exprimer la probabilité $P(T)$ en fonction de p.

3. Montrer que $P_T(M)=\dfrac{999p}{994p+5}$.

4. Pour quelles valeurs de p peut-on considérer que ce test est fiable ?

Partie C : Étude sur un échantillon

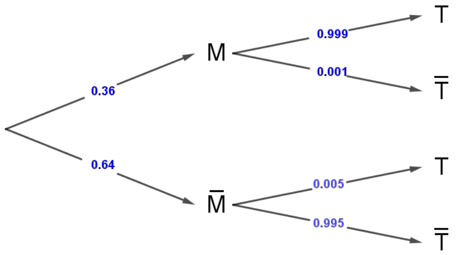
Pendant l'épidémie, on admet que la probabilité d'être atteint du chikungunya sur l'île de La réunion est de 0,36.
On considère un échantillon de n individus choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant le nombre d'individus infectés dans cet échantillon parmi les n tirés au sort.
On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p=0,36$.
Déterminer à partir de combien d'individus n la probabilité de l'événement « au moins un des n habitants de cet échantillon est atteint par le virus » est supérieure à 0,99.
Expliquer la démarche.

CORRECTION

1. L'énoncé précise :
$P_M(T)=0{,}999$ et $P_{\bar{M}}(T)=0{,}005$

2. $P(M)=\dfrac{270000}{750000}=\dfrac{27}{75}=\dfrac{9}{25}=0{,}36$

3. $P(\bar{M})=1-P(M)=1-0{,}36=0{,}64$
$P_M(\bar{T})=1-P_M(T)=1-0{,}999=0{,}001$
$P_{\bar{M}}(\bar{T})=1-P_{\bar{M}}(T)=1-0{,}005=0{,}995$
On obtient l'arbre pondéré suivant :



4. On nous demande de calculer $P(M\cap T)$
$P(M\cap T)=P(M)\times+P_M(T)=0{,}36\times0{,}999$
$P(M\cap T)=0{,}360$ à 10^{-3} près.

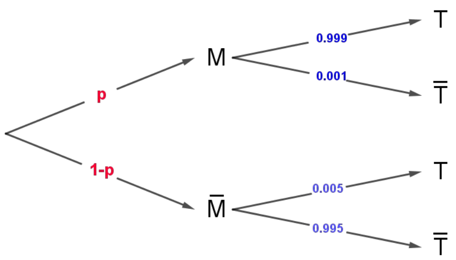
5. En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(T)=P(M\cap T)+P(\bar{M}\cap T)$
$P(M\cap T)=0{,}360$ $\quad P(\bar{M}\cap T)=P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(T)=0{,}64\times0{,}005=0{,}003$ à 10^{-3}près
$P(T)=0{,}363$ à 10^{-3}près.

6. On nous demande de calculer $P_T(M)$
$P_T(M)=\dfrac{P(M\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0{,}360}{0{,}363}=0{,}992$ à 10^{-3} près.

7. $0{,}992>0{,}95$ donc le test est fiable.

Partie B : Dépistage sur une population cible

1. $P(M)=p$ et $P(\bar{M})=1-p$ remarque : $0\leqslant p\leqslant 1$
On obtient comme arbre pondéré :



2. $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=p\times0{,}999=0{,}999\,p$
$P(\bar{M}\cap T)=P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(T)=(1-p)\times0{,}005=0{,}005-0{,}005\,p$
$P(T)=P(M\cap T)+P(\bar{M}\cap T)=0{,}999\,p+0{,}005-0{,}005\,p=0{,}994\,p+0{,}005$

3. $P_T(M)=\frac{P(M\cap T)}{P(T)}=\frac{0,999\,p}{0,994\,p+0,005}=\frac{999\,p}{994\,p+5}$.

4. Le test est fiable si et seulement si $\frac{999\,p}{994\,p+5}>0,95 \quad \Leftrightarrow \quad 999\,p>0,95\times 994\,p+5\times 0,95$

$\Leftrightarrow \quad 999\,p>944,3\,p+4,75 \quad \Leftrightarrow \quad 54,7\,p>4,75 \quad \Leftrightarrow \quad p>\frac{4,75}{54,7}\simeq 0,0868$

Le test est fiable si et seulement si $1 \geqslant p \geqslant 0,087$.

Partie C : Étude sur un échantillon

N est l'évènement : « au moins un des n habitants de cet échantillon est atteint par le virus »
$\bar{N}$ est l'évènement : « les n habitants de cet échantillon ne sont pas atteints par le virus ».
La probabilité qu'une personne ne soit pas atteinte par le virus est : $1-0,36=0,64$.
$P(\bar{N})=0,64^n$ et $P(N)=1-0,64^n$.
$P(N)>0,99 \quad \Leftrightarrow \quad 1-0,64^n>0,99 \quad \Leftrightarrow \quad 0,01>0,64^n$
ln est une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$
$\Leftrightarrow \quad \ln(0,01)>\ln(0,64^n) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0,01)>n\times\ln(0,64)$
$0<0,64<1$ donc $\ln(0,64)<0$
$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)}<n$
$\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)}\simeq 10,3$ et n est un entier naturel donc
$\Leftrightarrow \quad 11\leqslant n$
Il faut au moins 11 individus dans l'échantillon pour que la probabilité de N soit supérieure à 0,99.