Exercice 2 5 points

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=30$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+10$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .

2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3. Exprimer u_n en fonction de n pour tout n entier naturel.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=20+10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Justifier la réponse.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} w_0=45 \\ w_{n+1}=\frac{1}{2}w_n+\frac{1}{2}u_n+7 \end{cases}$.

1. Montrer que $w_1=44{,}5$.

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition de cette fonction suite.

```
def suite(n):
  U=30
  W=45
  for i range(1,n+1):
    U=U/2+10
    W=W/2+U/2+7
  return W
```

2. l'exécution de suite(1) ne renvoie pas le terme w_1 . Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de suite(n) renvoie la valeur du terme w_n ?

3.a. Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n on a : $w_n=10n\left(\frac{1}{2}\right)^n+11\left(\frac{1}{2}\right)^n+34$.

3.b. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$,on a : $0 \leqslant 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n+11\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{10}{n}$.

Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

CORRECTION

Partie A

1. $u_1=\frac{1}{2}u_0+10=\frac{1}{2}\times 30+10=25$

$u_2=\frac{1}{2}u_1+10=\frac{1}{2}+25+10=22{,}5$

2. Pour tout entier naturel n : $v_n=u_n-20 \quad \Leftrightarrow \quad u_n=v_n+20$

$v_{n+1}=u_{n+1}-20=\frac{1}{2}u_n+10-20=\frac{1}{2}(v_n+20)-10=\frac{1}{2}v_n+10-10$

$v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$.

Donc (v_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme $v_0=u_0-20=30-20=10$ et de raison $\frac{1}{2}$.

3. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4. Pour tout entier naturel n :

$u_n=v_n+20=20+10\left(\frac{1}{2}\right)^n$

5. $0\leqslant\frac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=20$

Partie B

1. $w_1=\frac{1}{2}w_0+\frac{1}{2}u_0+7=\frac{45}{2}+\frac{30}{2}+7=22{,}5+15+7$

$w_1=44{,}5$.

2. Pour exécuter suite(1), on effectue une seule boucle.

On obtient : $U=\frac{30}{2}+10=25$ (u_1) et $W=\frac{45}{2}+\frac{25}{2}+7=22{,}512{,}5+7=42\neq 44{,}5$

donc suite(1) ne renvoie pas w_1 .

Il faut corriger l'ordre des lignes 5 et 6 pour calculer d'abord w_1 puis u_1 .

```
1  def suite(n):
2    U=30
3    W=45
4    for i range(1,n+1):
5      W=W/2+U/2+7
6      U=U/2+10
7    return W
```

3.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n,

on a : $w_n=10n\left(\frac{1}{2}\right)^n+11\left(\frac{1}{2}\right)^n+34$.

Initialisation

$w_0=45$ et $10\times 0\times\left(\frac{1}{2}\right)^0+11\times\left(\frac{1}{2}\right)^0+34=0+11+34=45$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que :

$w_n=10n\left(\frac{1}{2}\right)^n+11\left(\frac{1}{2}\right)^n+34$ et on doit démontrer que $w_{n+1}=10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+34$

Or $w_{n+1}=\frac{1}{2}w_n+\frac{1}{2}u_n+7=\frac{1}{2}\left(10n\left(\frac{1}{2}\right)^n+11\left(\frac{1}{2}\right)^n+34\right)+\frac{1}{2}\left(20+10\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+7$

$$w_{n+1}=10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+17+10+10\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+7$$

$$w_{n+1}=10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+34$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a :

$w_n=10n\left(\frac{1}{2}\right)^n+11\left(\frac{1}{2}\right)^n+34$.

3.b. Si $n\geqslant 4$ alors $0\leqslant 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant\frac{10}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{10}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}10n\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}11\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=34$.