Exercice 3 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère :

- les points $C(3;0;0)$, $D(0;2;0)$, $H(-6;2;2)$ et $J\left(\frac{-54}{13};\frac{62}{13};0\right)$
- le plan P d'équation cartésienne $2x+3y+6z-6=0$.
- le plan P' d'équation cartésienne $x-2y+3z-3=0$.
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=-8+\frac{1}{3}t \\ y=-1+\frac{1}{2}t \\ z=-4+t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée.
Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 :
La droite (d) est orthogonale au plan P et coupe ce plan en H.

Affirmation 2 :
La mesure en degré de l'angle $\widehat{DCH}$, arrondie à 10^{-1}, est $17{,}3°$.

Affirmation 3 :
Les plans P et P' sont sécants et leur intersection est la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=3-3t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

Affirmation 4 :
Le point J est le projeté orthogonal du point H sur la droite (CD).

CORRECTION

Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

. P : $2x+3y+6z-6=0$ $\quad \vec{N}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

$\vec{N}=6\vec{u}$ donc la droite (d) est orthogonale à P.

. $H(-6;2;2)$ $\quad 2\times(-6)+3\times2+6\times2-6=-12+6+12-6=0$ donc H appartient au plan P.

$\begin{cases}-6=-8+\frac{1}{3}t\\2=-1+\frac{1}{2}t\\2=-4+t\end{cases} \Leftrightarrow \{t=6$ donc H appartient à la droite (d) et H est le point d'intersection de P et (d).

Affirmation 2 : FAUSSE

Preuve

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-9\\2\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CH}=-3\times(-9)+2\times2+0\times2=27+4=31$

$CD^2=(-3)^2+2^2+0^2=9+4=13 \qquad CD=\sqrt{13}$

$CH^2=(-9)^2+2^2+2^2=81+4+4=89 \qquad CH=\sqrt{89}$

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CH}=CD\times CH\times\cos(\widehat{DCH})=31$

$\cos(\widehat{DCH})=\frac{31}{CD\times CH}=\frac{31}{\sqrt{13}\times\sqrt{89}}$

En utilisant la calculatrice on obtient : $\widehat{DCH}=24{,}3°$ à 10^{-1} près.

Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

$\begin{cases}2x+3y+6z-6=0\\x-2y+3z-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y=-6z+6\\x-2y=-3z+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=-3t+3\\2x+y=-6t+6\\z=t\end{cases} t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}7x=-21t+21\\7y=0\times t+0\\z=t\end{cases} t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-3t+3\\y=0\\z=t\end{cases} t\in\mathbb{R}$

Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

$\overrightarrow{JH}\begin{pmatrix}-6+\frac{54}{13}\\2-\frac{62}{13}\\2\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{JH}\begin{pmatrix}-\frac{24}{13}\\-\frac{36}{13}\\2\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}-3-\frac{54}{13}\\\frac{63}{13}\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}-\frac{93}{13}\\\frac{63}{13}\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{CD}=-\frac{24}{13}\times(-3)-\frac{36}{13}\times2+2\times0=-\frac{72}{13}+\frac{72}{13}=0$

donc la droite (JH) est orthogonale à la droite (CD).

D'autre part $\overrightarrow{CJ}=\frac{31}{13}\overrightarrow{CD}$ donc le point J appartient à la droite (CD).

Conséquence : J est le projeté orthogonal du point H sur la droite (CD).