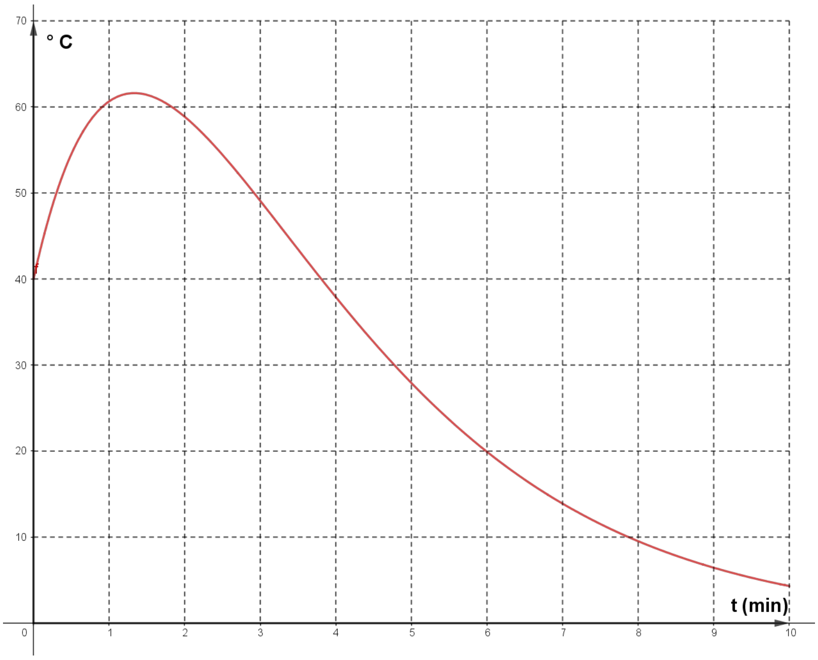
Exercice 4 5 points

Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé , sous certaines conditions.
Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.
L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.
La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.
Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps $[0;10]$.
Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer, par lecture graphique, au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale à l'instant $t=0$.



On appelle f la fonction température représentée par la courbe ci-dessus.
On précise que la fonction f est définie et dérivable $[0;10]$.
On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t)=(at+b)e^{-0,5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

2. On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b.

3. On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y'+0,5y=60e^{-0,5t}$. Déterminer la valeur de a.

Partie B : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0;10]$ par :

$$f(t)=(60t+40)e^{-0,5t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;10]$, on a : $f'(t)=(40-30t)e^{-0,5t}$.

2.a. Étudier le sens de variation de la fonction f.
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant intervenir les images des valeurs présentes dans le tableau.

2.b. Montrer que l'équation $f(t)=40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle $]0:10]$.

2.c. Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

3. On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2, exprimés en minute, par :

$$\frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

3.a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

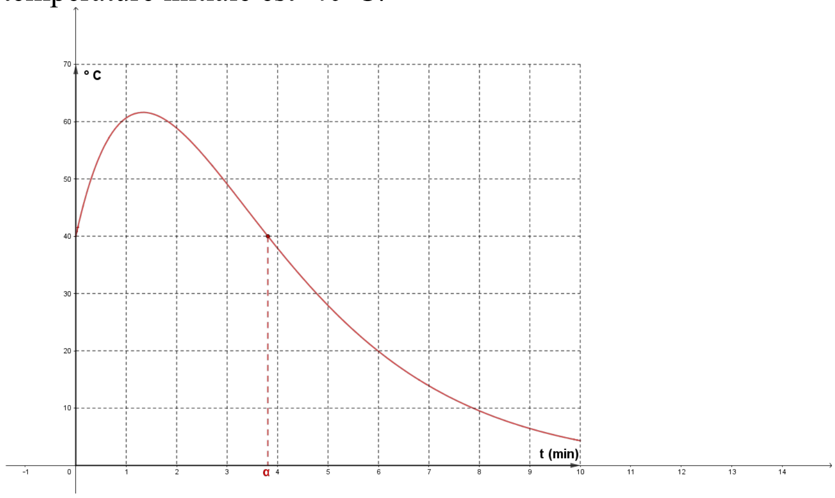
$$\int_0^4 f(t)\,dt = 320 - \frac{800}{e^2}$$

3.b. En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.

CORRECTION

Partie A

1. À l'instant $t=0$, la température initiale est $40°C$.



On nous demande de déterminer graphiquement l'abscisse du oint d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y=40$.
On obtient : 3,8. Donc au bout de 3min48s la température redescend à $40°C$.

2. Pour t appartenant à $[0;10]$, $f(t)=(at+b)e^{-0,5t}$.
$f(0)=40=(a\times 0+b)e^{0}=b$ donc $b=40$.

3. $f(t)=(at+40)e^{-0,5t}$ f est dérivable sur $[0;10]$.
$f'(t)=ae^{-0,5t}-0,5(at+40)e^{-0,5t}=(a-0,5at-20)e^{-0,5t}$ car $(e^{-0,5t})'=-0,5e^{-0,5t}$.
On admet que f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+0,5y=60e^{-0,5t}$, donc :
$f'(t)+0,5f(t)=60e^{-0,5t}$ $\Leftrightarrow$ $(a-0,5at-20)e^{-0,5t}+0,5(at+40)e^{-0,5t}=60e^{-0,5t}$
$\Leftrightarrow$ $ae^{-0,5t}=60e^{-0,5t}$ $\Leftrightarrow$ $(a-60)e^{-0,5t}=0$ $\Leftrightarrow$ $a=60$ car $e^{-0,5t}\neq 0$

Partie B : Étude de la fonction f

1. $f(t)=(60t+40)e^{-0,5t}$
$f'(t)=60e^{-0,5t}-0,5(60t+40)e^{-0,5t}=(-30t+40)e^{-0,5t}$

2.a. Pour tout nombre réel t appartenant à [0;10], $e^{-0,5t}>0$ donc le signe de $f'(t)$ est le signe de $(-30t+40)$ sur $[0;10]$.

$$-30t+40=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{40}{30}=\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases}-30t+40>0\\ 0\leqslant t\leqslant 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{4}{3}<t\\ 0\leqslant t\leqslant 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\leqslant t<\frac{4}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-30t+40<0\\ 0\leqslant t\leqslant 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{4}{3}>t\\ 0\leqslant t\leqslant 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{4}{3}<t\leqslant 10\end{cases}$$

$f(10)=60e^{-5}\simeq 4,31$

$f\left(\frac{4}{3}\right)=120e-\frac{2}{3}\simeq 61,61$

Tableau de variations

t	0		$\frac{4}{3}$		10
f '(t)		+	0	−	
f(t)	40	↗	$f(\frac{4}{3})$	↘	f(10)

2.b. f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{4}{3}\right]$

donc si $0<t\leqslant\frac{4}{3}$ alors $40<f(t)$ et l'équation $f(t)=40$ n'admet pas de solution sur $]0;\frac{4}{3}]$.

. f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{4}{3};10\right]$ à valeurs dans l'intervalle $\left[f(10);f\left(\frac{4}{3}\right)\right]$.

40 appartient à cet intervalle donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un réel α unique appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3};10\right]$ tel que $f(\alpha)=40$ (ou que l'équation $f(t)=40$ admet une unique solution α).

2.c. En utilisant la calculatrice par balayage (ou dichotomie) on obtient : $\alpha=3{,}8$ à 10^{-1} près.
La température de la réaction chimique est supérieure ou égale à 40°C sur $[0;\alpha]$ et strictement inférieure à 40°C sur $]\alpha;10]$.

3.a. $f(t)=(60t+40)e^{-05t}$

$u(t)=60t+40 \qquad u'(t)=60$

$v'(t)=e^{-0{,}5t} \qquad v(t)=\frac{e^{-0{,}5t}}{-0{,}5}=-2e^{-0{,}5t}$

u et v sont dérivables sur [0;4] et u' et v' sont continues sur [0;4].
On effectue une intégration par parties.

$$\int_0^4 f(t)\,dt=[-2(60t+40)e^{-0{,}5t}]_0^4 - \int_0^4(-120)e^{-0{,}5t}\,dt = -560e^{-2}+80+120[-2e^{-0{,}5t}]_0^4$$

$$\int_0^4 f(t)\,dt=-560e^{-2}+80-240e^{-2}+240=320-800e^{-2}$$

$$\int_0^4 f(t)\,dt=320-\frac{800}{e^2}$$

3.b. La température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes est :

$$\frac{1}{4-0}\int_0^4 f(t)\,dt=80-\frac{200}{e^2}\simeq 52{,}93\,°C$$