Exercice 1 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=xe^{-2x}$.
On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la fonction dérivée de la fonction f.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.
Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse , puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 :
Pour tout nombre réel x, on a $f'(x)=(-2x+1)e^{-2x}$.

Affirmation 2 :
La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
$y'-2y=e^{-2x}$

Affirmation 3 :
La fonction f est convexe sur $]-\infty;1]$

Affirmation 4 :
L'équation $f(x)=-1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5 :
L'aire du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses
et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ est égale à $\frac{1}{4}-\frac{3e^{-2}}{4}$.

CORRECTION

Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

Pour tout nombre réel x :

$(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$ $f'(x) = 1 \times e^{-2x} + x \times (-2e^{-2x}) = (-2x+1)e^{-2x}$

Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

Pour tout nombre réel x :

$f'(x) + 2f(x) = (-2x+1)e^{-2x} + 2xe^{-2x} = e^{-2x}$

donc f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2y = e^{-2x}$.

Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc pour déterminer la convexité de f on détermine le signe de f'' .

Pour tout nombre réel x :

$f'(x) = (-2x+1)e^{2x}$ $(-2x+1)' = -2$

$f''(x) = -2 \times e^{-2x} + (-2x+1) \times (-2e^{-2x}) = -2e^{-2x} + 4xe^{-2x} - 2e^{-2x} = 4(x-1)e^{-2x}$

$4e^{-2x} > 0$ donc le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de (x-1).

x	-∞		1		+∞
f''(x)		−	0	+	
convexité de f		concave		convexe	

Donc f n'est pas convexe sur $]-\infty; 1]$.

Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

$f'(x) = (-2x+1)e^{-2x}$

Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de (2x-1).

$\lim_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$xe^{-2x} = \frac{x}{e^{2x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{e^{2x}}\right)$ or $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e} > 0$

Tableau de variations de f

x	-∞		$\frac{1}{2}$		+∞
f '(x)		+	0	−	
f(x)	-∞	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

f est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ à valeurs dans $\left]-\infty; \frac{1}{2e}\right]$ et $-1 \in \left]-\infty; \frac{1}{2e}\right]$ le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique α à l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ à valeurs dans $\left]0;\frac{1}{2e}\right]$ donc l'équation $f(x)=-1$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

<u>Conséquence</u>
L'équation $f(x)=-1$ admet une unique solution α solution sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5 : VRAIE
<u>Preuve</u>
f est continue et positive ou nulle sur [0;1] donc l'aire (en unité d'aire) du domaine plan compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ est égale à $\int_0^1 f(x)\,dx$.

$f(x)=xe^{-2x}$
On effectue une intégration par parties :

$u(x)=x \qquad u'(x)=1 \qquad v'(x)=e^{-2x} \qquad v(x)=-\frac{e^{-2x}}{2}$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1=-\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{4}-\frac{3e^{-2}}{4}$$